

TMS050: Matematisk statistik för Z, del A

Tentamen 28 augusti 2003 f V

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev bonus från inlämningsuppgifterna adderas till totalpoängen innan betyg sättes.

Jour är Yulia Yurgens (ankn 3582). Examinator är Tommy Norberg (ankn 3528 eller 0730 79 42 09).

Uppgifter

1. I en viss population förekommer en viss sjukdom med frekvensen $1/20$. Då man testar om en godtyckligt vald individ har denna sjukdom gäller att testet visar positivt resultat (d.v.s indikerar att individen är sjuk) med sannolikheten 0.9 om individen är sjuk och med sannolikheten 0.2 annars. Antag att testet visat positivt resultat för en godtyckligt vald individ. Vad är sannolikheten att denna individ verkligen är sjuk. (3 p)
2. Antag att du på något sätt kan generera utfall ifrån slumpmekanismen $X \sim U(0, 1)$. Låt x vara ett sådant utfall. Låt $y = \lfloor 5x \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ betyder heltalsdelen av). Låt Y beteckna motsvarande stokastiska variabel. Beräkna $E[Y]$ och $\text{Var}[Y]$. (4 p)
3. Könet hos en nyfödd människa bestäms av två kromosomer R och Y . Alla individer har minst en R -kromosom och alla manliga individer bär på Y -kromosomen. Färgblindhet orsakas av en defekt gen på R -kromosomen och vi betecknar de R -kromosomer som har denna defekta gen med r . M.a.p färgblindhet är det därför tre möjliga genotyper (kromosompar) för kvinnor och två för män:

Kvinna	Man
RR (normal)	RY (normal)
Rr (bärare av anlaget)	rY (färgblind)
rr (färgblind)	

Ett barn ärver slumpmässigt en könskromosom från varje förälder. En normal man (RY) gifter sig med en kvinna som bär på anlaget (Rr).

- (a) Antag att de får en son. Vad är sannolikheten att denna son är färgblind?(1 p)
 - (b) Antag att paret tillsammans får fem barn. Vad är sannolikheten att minst två av dem är färgblinda pojkar? (2 p)
4. En enkel integrerad krets antas ha en exponentialfördelad funktionstid med väntevärdet 20 000 driftstimmar.
 - (a) Vad är sannolikheten att kretsen fungerar i minst 20 000 driftstimmar? (1 p)
 - (b) Antag att utrustningen den sitter i har körts i 10 000 timmar. Bestäm den betingade sannolikheten att kretsen fungerar i ytterligare minst 20 000 driftstimmar? (2 p)

(Vänd!)

5. Låt $(X, Y) \sim U[(0, 2) \times (0, 5)]$. Härled X :s och Y :s marginaltätheter samt visa att X och Y är oberoende. (4 p)
6. Låt utfallet av ett visst experiment vara slumpmässigt och bero av en parameter θ . Antag att man gör n oberoende upprepningar av detta experiment och ska beräkna en punktsskattning av θ med
- (a) momentmetoden,
 - (b) ML-metoden.

Redogör i båda fallen för hur man går tillväga. (4 p)

7. Visa att stickprovsvariansen S^2 är en väntevärdesriktig skattning av variansen σ^2 . Här förutsätts att observationerna är oberoende, n till antalet och att deras fördelning har ändligt andramoment. (4 p)
8. I ett laboratorium gjordes fem väntevärdesriktiga mätningar av en viss storhet μ . Man erhö

11.67 12.98 6.99 9.95 9.61

Antag normalfördelade fel.

- (a) Punkt- och intervallskatta μ . Låt konfidensgraden vara 95%. (4 p)
- (b) En viktig förutsättning har ej nämnts. Vilken? (1 p)

Lycka till!

TMS050: Matematisk statistik för Z, del A

Tentamen 16 januari 2003 f V

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev bonus från inlämningsuppgifterna adderas till totalpoängen innan betyg sättes.

Jour är Yulia Yurgens (ankn 3582).

Uppgifter

1. Händelserna A och B är disjunkta. Dessutom gäller

$$P(A \setminus B) = 0.23, \quad P(B \setminus A) = 0.27$$

- (a) Är A och B oberoende? (1 p)
(b) Beräkna $P(A \cup B)$. (1 p)

2. 3 bilar anländer till en tom parkeringsplats. På hur många sätt kan de placeras ut på parkeringsplatsen om totala antalet platser är

- (a) 5 och ordningen saknar betydelse? (2 p)
(b) 10 och ordningen har betydelse? (2 p)

3. Man gör bedömningen att ca 70% av en viss f.d fabrikstomt är förorenad och tar ett jordprov i en slumpmässigt vald position. Analysen av provet ger till resultat att det ej är förorenat. Men observera att mätmetoden är sådan att den ger felaktigt resultat i ca 1 av 20 analyser av ren jord och i ca 2 av 5 analyser av förorenad jord. Bestäm sannolikheten att provet trots allt är förorenat. (4 p)

4. Låt X vara kontinuerlig med tätheten $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Härled momentgenererande funktion (m.g.f) för X , och beräkna utan att integrera och endast med hjälp av m.g.f, X 's varians. (4 p)

5. Antag att du har oberoende observationer $x_1, \dots, x_n$ av en stokastisk variabel X , sådan att $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = p$. Visa att trolighetsskattningen av p är

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_i x_i \quad (4 \text{ p})$$

6. Pontus singlar en krona 100 gånger. Han erhöll 35 klave och 65 krona.
(a) Skatta sannolikheten för krona. Önskad konfidensgrad i felet: 95%. (3 p)
(b) Är myntet symmetriskt? (1 p)

7. Vid ett tillfälle gjorde man $n = 25$ oberoende mätningar av en concentrationen i luften av en viss förorening. Därvid erhöles $\bar{x} = 10.3$, $s = 2.75$ (ppm). Punkt- och intervallskatta den sanna föroreningshalten under förutsättning att mätningarna är väntevärdesriktiga och normalfördelade. (3 p)

(vänd!)

8. Forts av föregående uppgift. Man ville också veta ungefär hur stor 0.95-kvantilen är. Går det att punktskatta denna utifrån informationen som gavs i uppgift 7 och om svaret är ja, gör så. (4 p)

Lycka till!

TMS050: Matematisk statistik för Z, del A

Tentamen 26 oktober 2002 em V

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p. Ev bonus från inlämningsuppgifterna adderas till totalpoängen innan betyg sättes.

Jour är Yulia Yurgens (ankn 3582).

Uppgifter

1. Låt $X \sim \text{Bin}(2, 1/3)$ och antag att händelsen A är sådan att $P(A|X = 0) = P(A|X = 1) = \frac{1}{4}$ och $P(A|X = 2) = 1$.

(a) Är A och X oberoende? (1 p)

(b) Beräkna $P(A)$. (1 p)

(c) Beräkna $P(X = 2|A)$. (1 p)

2. Låt T vara tiden tills första impulsen i en Poissonprocess med intensitet λ impulser per tidsenhet. Visa att T är Exponentialfördelad med väntevärde $E[T] = 1/\lambda$? (4 p)

3. En viss typ av mätvärden antas vara normalfördelade med väntevärde $\mu = 5.5$ och standardavvikelse $\sigma = 2.2$. Antag att du ska göra 3 oberoende mätningar. Hur stor är sannolikheten att åtminstone 2 av dessa ligger i intervallet $[3.3, 7.7]$? (3 p)

4. Paret X, T är kontinuerligt fördelat med tätheten

$$f(x, t) = \frac{1}{t} e^{-t}, \quad t > x > 0$$

(a) Bestäm T 's täthet. (2 p)

(b) Bestäm $E[X]$. (2 p)

5. Låt $X_1, \dots, X_n$ vara oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde μ och standardavvikelse σ . Låt $\bar{X}$ vara medelvärdet och S^2 stickprovsvariansen. Visa att

(a) S^2 väntevärdesriktigt skattar σ^2 , (2 p)

(b) $\text{Var}[\bar{X}] = \sigma^2/n$, (1 p)

(c) $P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. (3 p)

I (c) är $\epsilon > 0$ godtyckligt.

6. Felsannolikheten p för en viss produktionsprocess får som mest vara 0.05. Man producerar satsar om N st enheter åt gången. Efter det att en sats är färdigproducerad, måste man medelst kontroll av $n = 200$ producerade enheter säkerställa att $p < 0.05$, innan produktionen av en ny sats får påbörjas. Man tar alltså här ett kundperspektiv. Antag att satsstorleken N är så stor att fördelningen för f , antalet funna felaktiga, väl approximeras av $\text{Bin}(n, p)$ om man slumpmässigt väljer ut $n = 200$ st enheter för kontroll.

- (a) Formulera detta som ett statistisk testproblem, låt nivån vara α och konstruera testet. (3 p)
- (b) Vid ett tillfälle fann man $f = 4$ st felaktiga enheter. Behöver processen justeras om man väljer nivån $\alpha = 0.05$? (1 p)
7. Vid ett tillfälle gjorde man $n = 30$ oberoende bestämningar av hållfastheten för en viss stålqualität. Därvid erhöles medelvärdet $\bar{x} = 63.42$ och standardavvikelsen $s = 10.451$. Beräkna ett ca 95% konfidensintervall för hållfastheten ifråga. (3 p)
8. Vid ett annat tillfälle (j.f.r uppgift 7) gjorde man $n = 32$ oberoende bestämningar av hållfastheten för en viss annan stålqualität. Därvid erhöles medelvärdet $\bar{x} = 59.34$ och standardavvikelsen $s = 9.378$.
- (a) Beräkna under antagande om lika varians ett konfidensintervall för differensen av hållfastheterna. Konfidensgraden ska vara 0.90. (2 p)
- (b) Kan det anses statistiskt säkerställt på nivån 0.10 att hållfastheterna för de två kvaliteterna är olika? (1 p)

Lycka till!

Lösningar eller svar till Matematisk statistik för Z, del A den 28/8-03

1. Låt S betyda att individen har sjukdomen och D att den detekteras. Följande är givet: $P(S) = 1/20 = 0.05$, $P(D|S) = 0.9$ och $P(D|S^c) = 0.2$. Bayes formel ger

$$P(S|D) = \frac{P(S)P(D|S)}{P(S)P(D|S) + P(S^c)P(D|S^c)} = \frac{0.05 \cdot 0.9}{0.05 \cdot 0.9 + 0.95 \cdot 0.2} \approx 0.191$$

2. Y är likformigt fördelad på $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Härur följer att

$$E[Y] = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + \dots + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(0 + 1 + 2 + 3 + 4) = 2$$

Analogt fås

$$E[Y^2] = \frac{1}{5}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 6 \Rightarrow \text{Var}[Y] = 6 - 2^2 = 2$$

3. (a) De fyra möjliga genotyperna för avkomman är RR , Rr , RY och rY . De har p.g.a slumpmässigheten all sannolikheten $1/4$. Således är svaret på uppgiften $1/2$ —det är ju bara genotyperna RY och rY som svarar mot manligt kön och av dessa indikerar endast rY färgblindhet.
- (b) Av det som just sagts förstår vi också att sannolikheten att avkomman är en färgblind pojke är $1/4 = 0.25$. Antalet färgblinda pojkar i en kull om 5 barn är $\text{Bin}(5, 0.25)$. Således blir den sökta sannolikheten

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^5 \binom{5}{k} 0.25^k \cdot 0.75^{5-k} &= 1 - \sum_{k=0}^1 \binom{5}{k} 0.25^k \cdot 0.75^{5-k} \\ &= 1 - 0.75^5 - 5 \cdot 0.25 \cdot 0.75^4 \approx 0.367 \end{aligned}$$

4. (a) $e^{-1} \approx 0.37$
- (b) $e^{-1} \approx 0.37$ p.g.a exponentialfördelningens glömskeegenskap.

5. X 's fördelningsfunktion fås enligt

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \int_0^5 \frac{1}{10} dy dz = \int_0^x \frac{1}{2} dz = \frac{x}{2}$$

för $0 \leq x \leq 2$. Således är X 's täthet

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{2}$$

och vi ser att X är likformigt fördelad på $(0, 2)$. Analogt inses att Y 's täthet är

$$f(y) = \frac{1}{5}$$

för $0 < y < 5$ och därför likformigt fördelad på $(0, 5)$. Vi ser nu också att X och Y är oberoende, ty

$$f(x, y) = \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = f(x)f(y)$$

6. Kalla tätheten för $f(x; \theta)$ och låt beteckna $x_1, \dots, x_n$ observationerna.

- (a) Beräkna medelvärde $\bar{x}$ och lös ut θ ur $\bar{x} = \int_R x f(x; \theta) dx$. Idéen i momentmetoden är ju att byta ut μ mot $\bar{x}$ i formeln $\mu = \int_R x f(x; \theta) dx$.

(b) Bilda trolighetsfunktionen

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta)$$

och sök det θ som maximerar $L(\theta)$. Detta värde på θ kommer ju då att bero av observationerna $x_1, \dots, x_n$, så det blir en legitim punktskattning av parametern θ .

7. Låt $x_1, \dots, x_n$ beteckna observationerna och $X_1, \dots, X_n$ motsv stokastiska variabler. Notera först att

$$(n-1)S^2 = \sum_i (X_i - \bar{X})^2 = \sum_i X_i^2 - n\bar{X}^2$$

(Den som inte kommer ihåg detta får naturligtvis härleda uttrycket.) Vi får nu att

$$E[(n-1)S^2] = \sum_i E[X_i^2] - nE[\bar{X}^2] = nE[X_1^2] - nE[\bar{X}^2]$$

Notera att

$$E[X_1^2] - E[X_1]^2 = \sigma^2 \Rightarrow E[X_1^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

där $\mu = E[X_1]$. Analogt

$$E[\bar{X}^2] = \text{Var}[\bar{X}] + E[\bar{X}]^2 = \sigma^2/n + \mu^2$$

Vi får följaktligen att

$$E[(n-1)S^2] = n(\sigma^2 + \mu^2) - n(\sigma^2/n + \mu^2) = (n-1)\sigma^2$$

vilket visar att S^2 skattar σ^2 väntevärdesriktigt.

8. (a) Börja med att räkna ut att $\bar{x} = 10.24$ och att $s = 2.269$. Ur tabell fås $t_{0.025}(4) = 2.776$. Felet med konfidens 95% är

$$2.776 \cdot 2.269/\sqrt{5} = 2.817 \approx 2.82$$

och $\mu = 10.24 \pm 2.82$ är den sökta punkt- och intervallskattningen. Ett alternativ sätt att ge intervallskattningen är $\mu \in (7.42, 10.06)$. Punktskattningen av μ är $\hat{\mu} = 10.24$.

(b) Det är oerhört viktigt att observationerna är oberoende.

Lösningar till Matematisk statistik för Z, del A den 16/1-03

1. (a) De är ej oberoende eftersom $0 = P(A \cap B) \neq P(A)P(B) > 0$
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.23 + 0.27 = 0.50$
2. (a) $\binom{5}{3} = 10$
(b) $\binom{10}{3} \cdot 3! = 720$
3. Bayes formel ger att den sökta sannolikheten är $\frac{0.7 \cdot \frac{2}{5}}{0.7 \cdot \frac{2}{5} + 0.3 \cdot \frac{19}{20}} = \frac{56}{56 + 57} \approx 0.50$
4. $m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{tx-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda-t}$ för $t < \lambda$. Härur fås att $m'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$ och $m''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$. Således är $E[X] = m'_X(0) = \frac{1}{\lambda}$ och $E[X^2] = m''_X(0) = \frac{2}{\lambda^2}$ och det följer att $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.
5. Trolighetsfunktionen är $L(p) = p^{\sum_i x_i} (1-p)^{n-\sum_i x_i}$, ty sannolikheten för utfallet $x_1, \dots, x_n$ är produkten av n faktorer där den i :te = p om $x_i = 1$ och $= 1-p$ om $x_i = 0$. Vi logaritermar troligheten eftersom den är lättare att maximera: $\mathcal{L}(p) = (\sum_i x_i) \ln p + (n - \sum_i x_i) \ln(1-p)$. Vi får nu att $\mathcal{L}'(p) = \frac{\sum_i x_i}{p} - \frac{n - \sum_i x_i}{1-p}$ och ur $\mathcal{L}'(p) = 0$ följer $p = \frac{\sum_i x_i}{n}$. Trolighetsskattningen av p är alltså $\hat{p} = \frac{\sum_i x_i}{n}$, v.s.v.
6. (a) $\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} = 0.65 \pm 0.093$
(b) Man kan kanske misstänka att myntet ej är symmetriskt, eftersom 0.5 ligger utanför konfidensintervallet. Faktum är att ett test av $H_0 : p = 0.5$ mot $H_1 : p \neq 0.5$ på nivån 0.05 skulle förkasta H_0 .
7. $\mu \pm t_{0.005}(24)s/\sqrt{n} = 10.3 \pm 2.797 \cdot 2.75/\sqrt{25} = 10.3 \pm 1.54$
8. Låt X vara normalfördelad med väntevärde μ och standardavvikelse σ och låt Z vara standard normal. Den sökta kvantilen, $x_{0.95}$, definieras av att $P(X \leq x_{0.95}) = 0.95 \Rightarrow P(Z \leq (x_{0.95} - \mu)/\sigma) = 0.95 \Rightarrow (x_{0.95} - \mu)/\sigma = 1.645 \Rightarrow x_{0.95} = \mu + 1.645\sigma$. Skattningarna av μ resp σ är $\bar{x}$ och s . Således skattar summan $\bar{x} + 1.645s$ 0.95-kvantilen $x_{0.95}$. Svaret på frågan är alltså ja, det går, och skattningen av 0.95-kvantilen är $\hat{x}_{0.95} = \bar{x} + 1.645s \approx 14.8$.

Lösningar till Matematisk statistik för Z, del A den 29/10-02

1. (a) Nej, ty $P(A|X=1) \neq P(A|X=2)$.
(b) Ur formelsamling (se stycket om Binomialfördelningen) fås först att

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad P(X=1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \quad P(X=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Genom att dela upp händelsen A i de tre disjunkta bitarna $X=0$, $X=1$ och $X=2$, fås sedan

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X=0, A) + P(X=1, A) + P(X=2, A) \\ &= P(X=0)P(A|X=0) + P(X=1)P(A|X=1) + P(X=2)P(A|X=2) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(c)

$$P(X=2|A) = \frac{P(X=2, A)}{P(A)} = \frac{P(X=2)P(A|X=2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot 1}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2. Låt N_t beteckna antalet impulser i tidsintervallet $[0, t]$. Då gäller, för varje $t \geq 0$, att $T > t \Leftrightarrow N_t = 0$. Detta ger $P(T > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$. Så T 's fördelningsfunktion är $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ och medelst derivering följer att T 's täthet är $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Detta är tätheten för en Exponentialfördelning med väntevärdet $\beta = 1/\lambda$ (j.f.r formelsamlingen eller Beta), vilket skulle visas.
3. Låt $X \sim N(5.5, 2.2)$ vara ett typiskt mätresultat och låt N vara antalet observationer i intervallet $[3.3, 7.7]$. Då är $N \sim \text{Bin}(3, p)$, där $p = P(X \in [3.3, 7.7]) = P(Z \in [-1, 1]) = 0.6826$ (obs $Z \sim N(0, 1)$). Den sökta sannolikheten är därför

$$P(N \geq 2) = P(N=2) + P(N=3) = 3p^2(1-p) + p^3 \approx 0.76$$

4. (a) För $t > 0$ får vi

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = \int_0^t \frac{1}{t} e^{-t} dx = e^{-t}$$

(b) Låt $H(x, t) = x$. Då

$$\begin{aligned} E[X] &= E[H(X, T)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, t) f(x, t) dx dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^t x \frac{1}{t} e^{-t} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5. (a) Det gäller att visa att $E[S^2] = \sigma^2$. Vi behöver använda att

$$(n-1)S^2 = \sum_i X_i^2 - n\bar{X}^2$$

Linjäriteten hos väntevärdesoperatoren ger då direkt

$$E[(n-1)S^2] = \sum_i E[X_i^2] - nE[\bar{X}^2]$$

Notera

$$\begin{aligned} E[X_i^2] &= \text{Var}[X_i] + E[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2 \\ E[\bar{X}^2] &= \text{Var}[\bar{X}] + E[\bar{X}]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \end{aligned}$$

Härur fås

$$E[(n-1)S^2] = n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = (n-1)\sigma^2$$

och $E[S^2] = \sigma^2$ följer.

(b) Det gäller att visa att $E[\bar{X}] = \mu$. Så här går det till:

(c)

$$\text{Var}[\bar{X}] = \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Den 2:a likheten följer av variansen är ett kvadratisk mått och den 3:e av oberoendet.

(d) Låt $\epsilon = k\sigma/\sqrt{n}$ i Chebyshevs olikhet. Då

$$P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) = P(|\bar{X} - \mu| > k\sigma/\sqrt{n}) \leq \frac{1}{k^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow 0$$

då $n \rightarrow \infty$. Enl vad vi just visat är ju medelvärdets väntevärde lika med μ och standardavvikelse lika med $\sigma/\sqrt{n}$.

6. (a) Man ska testa nollhypotesen $H_0 : p \geq 0.05$ mot alternativet $H_1 : p < 0.5$ (alternativet ska ju vara det man vill visa). Man ska förkasta då $f \leq c$, ty ju mindre f är, desto mer tyder det på att p är litet, och kravet $\alpha = P(f \leq c | p = 0.05)$, leder till att $f \leq c$ är ekvivalent med att kräva att $\frac{f-10}{\sqrt{9.5}} \leq -z_\alpha$. Detta är naturligtvis samma sak som att kräva att $\frac{10-f}{\sqrt{9.5}} \geq z_\alpha$ eller att $f \leq 10 - z_\alpha\sqrt{9.5}$, där z_α ges av att $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ för $Z \sim N(0,1)$. Ty då $p = 0.05$ är f enl c.g.s approximativt normalfördelad med väntevärde $200 \cdot 0.05 = 10$ och standardavvikelse $\sqrt{200 \cdot 0.05 \cdot 0.95} = \sqrt{9.5}$
- (b) $f = 4 \Rightarrow \frac{10-f}{\sqrt{9.5}} = 1.94$. I tabell över normalfördelningskvantiler ses att $z_{0.05} = 1.645 \Rightarrow H_0 : p \geq 0.05$ förkastas. På nivån 0.05 kan det alltså anses säkerställt att $p < 0.05$. Processen behöver då ej justeras.

7. Konfidensintervallet bör beräknas ur faktumet $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, som gäller exakt om mätvärdena är normalfördelade, annars approximativt enl c.g.s. Man får då

$$\mu = \bar{x} \pm t_{29,0.025}S/\sqrt{n} = 63.42 \pm 2.04523 \cdot 10.451/\sqrt{30} = 63.42 \pm 3.90$$

eller $\mu \in [59.52, 67.32]$ med konfidensen ca 95%.

8. (a) Lika varians innebär att vi kan väga ihop variansskattningarna till

$$s_p^2 = \frac{29 \cdot 10.451^2 + 31 \cdot 9.378^2}{60} = 98.231 \Rightarrow s_p = 9.911$$

Konfidensintervallet bör beräknas ur faktumet $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$, där

indexeringen refererar till de olika mätserierna och som gäller exakt om mätvärdena är normalfördelade, annars som ovan approximativt enl c.g.s. Man får då

$$\begin{aligned} \mu_1 - \mu_2 &= \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{60,0.05} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \\ &= 63.42 - 59.34 \pm 1.67065 \cdot 9.911 \sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{32}} = 4.08 \pm 4.21 \end{aligned}$$

eller $\mu \in [-0.13, 8.29]$ med konfidensen ca $\approx 90\%$.

- (b) Nej, ty $0 \in [-0.13, 8.29]$ gäller med konfidensen ca 90%.