

3.14

I ett experiment att ympa en apelsinart på stammen till en annan utfördes 5 försök.

$\bar{X}$ = antal misslyckade ympningar

X	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,7	0,2	0,05	0,03	0,01	?

töylhet

$$\sum_{x=0}^5 f(x) = 1 \Rightarrow f(5) = 0,01$$

a) $E[\bar{X}] = ?$

$$E[\bar{X}] = \sum_x x f(x) = 0 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,03 + 4 \cdot 0,01 + 5 \cdot 0,01 = 0,48$$

b) $\mu_x = E[\bar{X}]$

c) $E[\bar{X}^2] = ?$

$$E[\bar{X}^2] = \sum_x x^2 f(x) = 0^2 \cdot 0,7 + 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,05 + 3^2 \cdot 0,03 + 4^2 \cdot 0,01 + 5^2 \cdot 0,01 = 1,08$$

d) $\text{Var}(\bar{X}) = E[\bar{X}^2] - (E[\bar{X}])^2 = 1,08 - 0,48^2 = 0,8496$

e) $\sigma_{\bar{X}}^2 = \text{Var}(\bar{X})$

f) standardavvikelsen för $\bar{X} = \sigma_x = \sqrt{\text{Var}(\bar{X})} \approx 0,9214$

g) Enheten för σ_x = enheten för en observerade ($\bar{X}$).
Här : antal

3.24

13

Sannolikheten att en oljekälla kommer bli produktiv är $1/13$. Källarna borrar i olika delar av landet så att en källa är produktiv eller inte beror ej på de övriga källarna. (oberoende).

X = antal borrade hål tills första lyckade.

- a) Bekräfta att X är geometriskt fördelad.
Värdet på parametern p ?

Egenskaper för geometrisk fördelning:

- 1) Experimentet består i en serie av försök. Utfallet av ett försök kan betecknas som antingen 'lyckat' (s) eller 'misslyckat' (f). Ett försök enligt ovan kallas Bernoulli-försök.
- 2) Försöken är identiska och oberoende. Samma sannolikheten för 'lyckat' försök = p .
- 3) Stokastiska variabeln X betecknar antalet försök tills första 'lyckade'.

$$S = \{ s, fs, ffs, fffs, \dots \}$$

$$P(X=1) = p$$

$$P(X=2) = (1-p)p$$

$$P(X=3) = (1-p)^2 p$$

osv

I denna fall $X \sim \text{Geo}(p)$, där $p = 1/13$

b) Vad är det korrekta uttrycket för $\bar{X}$ täthet?

$$f_{\bar{X}}(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

$$= \left(\frac{12}{13}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{13}$$

c) Vad är det korrekta uttrycket för moment-genererande funktion för $\bar{X}$

$$m_{\bar{X}}(t) = E[e^{t\bar{X}}]$$

$$\bar{X} \sim \text{Geo}(p)$$

sid 60

$$m_{\bar{X}}(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}, \quad \text{där } q = 1-p$$

$$t < -\ln q$$

$$= \frac{\frac{1}{13} e^t}{1 - \frac{12}{13} e^t} = \frac{e^t}{13 - 12e^t}, \quad \text{för } t < -\ln \frac{12}{13}$$

d) Enligt sats 3.4.3, s. 62:

$$* E[\bar{X}] = 1/p = 1/(1/13) = 13$$

$$* E[\bar{X}^2] = \frac{(1+q)}{p^2} = \frac{1 + 12/13}{(1/13)^2} = 13^2 (1 + 12/13) =$$

$$= 13^2 + 12 \cdot 13 = 325$$

$$* \sigma_{\bar{X}}^2 = \text{Var}[\bar{X}] = \frac{q}{p^2} = \frac{12/13}{(1/13)^2} = \frac{12}{13} \cdot \frac{13^2}{1} = 12 \cdot 13 =$$

$$= 156$$

$$(\text{Var}(\bar{X}) = E[X^2] - (E[X])^2 = 325 - 13^2 = 156)$$

$$* \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\text{Var}[X]} = \sqrt{156} \approx 12,5$$

$$\begin{aligned}
 e) \quad P[X \geq 2] &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 1) = \\
 &= 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{13}\right)^{1-1} \cdot \frac{1}{13} \right] = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}
 \end{aligned}$$

f) Antag att 10 hål har borrats utan att hitta en fyndighet. Vad är sannolikheten att minst två till hål måste borraras för att lyckas.

Vilken egenskap kan användas för att svara på frågan?

s. 64 → 'Glömskeegenskapen'!

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 12 \mid X \geq 11) &= \frac{P(X \geq 12 \cap X \geq 11)}{P(X \geq 11)} = \\
 &= \frac{1 - P(X < 12)}{1 - P(X < 11)} = \frac{1 - P(X \leq 11)}{1 - P(X \leq 10)} = \\
 &= \frac{1 - F(11)}{1 - F(10)} = \frac{\left(\frac{12}{13}\right)^{11}}{\left(\frac{12}{13}\right)^{10}} = \frac{12}{13} \approx 0,92
 \end{aligned}$$

$$F(x) = 1 - q^x$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P(X \leq x) = \\
 &= 1 - (1-p)^x = \\
 &= 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^x
 \end{aligned}$$

En diskret stokastisk variabel har

$$m_{\bar{X}}(t) = e^{2(e^t - 1)}$$

a) Hitta $E(\bar{X})$

b) Hitta $E(\bar{X}^2)$

c) Hitta σ^2 och σ

$$\begin{aligned} a) \quad E(\bar{X}) &= \left. \frac{d m_{\bar{X}}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(e^{2(e^t - 1)})}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= 2 e^{2(e^t - 1) + t} \Big|_{t=0} = \underbrace{2 e^{2(e^0 - 1) + 0}}_{e^0 = 1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad E(\bar{X}^2) &= \left. \frac{d^2 m_{\bar{X}}(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = 2 e^{2(e^t - 1) + t} \cdot (1 + 2e^t) \Big|_{t=0} = \\ &= 2 e^{2(e^0 - 1) + 0} \cdot (1 + 2e^0) = 2 e^0 \cdot (1 + 2e^0) = \\ &= 2 \cdot (1 + 2) = 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \sigma^2 &= \text{Var}(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - (E(\bar{X}))^2 = 6 - 2^2 = 6 - 4 = 2 \\ \sigma &= \sqrt{\text{Var}(\bar{X})} = \sqrt{2} \approx 1,41 \end{aligned}$$

Tidigare användes en 4x5 inch Kamera.
Nu påstås att en 35 mm Kamera ger lika bra resultat (den är dessutom snabbare och billigare).

- a) 15 motiv fotograferades med båda kamerorna. De anmärkta bilderna kontrollerades av en optisk domare som sedan väljer den bästa inom varje par.

$\bar{X}$ = antal valda 35 mm-bilder

Om det inte är någon skillnad i kvalitet mellan bilderna och domaren väljer bild slumpvis, vad är (det förväntade värdet på $\bar{X}$?) väntevärdet av $\bar{X}$?

$$\bar{X} \sim \text{Bin} \left(15, \frac{1}{2} \right)$$

$$E(\bar{X}) = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7,5$$

- b), c) Skulle du bli överraskad om domaren valde 12 eller fler 35 mm-bilder?

Förklaring baserad på sannolikheten.
Borde man misstänka att domaren ej väljer på måfå?

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 12) &= P(\bar{X} = 12) + P(\bar{X} = 13) + P(\bar{X} = 14) + \\ &\quad + P(\bar{X} = 15) = \end{aligned}$$

340 first

$$\begin{aligned}
 &= \binom{15}{12} \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{15}{13} \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{15}{14} \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \left(\frac{1}{2}\right) + \\
 &+ \binom{15}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\underbrace{\binom{15}{12}}_{=15} + \underbrace{\binom{15}{13}}_{=105} + \underbrace{\binom{15}{14}}_{=1} + \underbrace{\binom{15}{15}}_{=1} \right) \cdot \frac{1}{2^{15}} \\
 &= \frac{576}{2^{15}} \approx 0,0175
 \end{aligned}$$

$\begin{aligned}
 &= \frac{15!}{13!2!} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 7 \cdot 15 = 105 \\
 &= \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 35 \cdot 13 = 455
 \end{aligned}$

Ett specifikt kärnkraftverk släpper ut en detekterbar mängd radioaktiva gaser, snitt två gånger per månad.

(i) Vad är det förväntade antalet utsläpp under en tremånadersperiod?

(ii) Om fler än 12 utsläpp inträffar, bör man misstänka att angivna siffran är felaktig?

$\bar{X}$ = antal utsläpp

$$\bar{X} \sim \text{Poi}(\lambda)$$

$$f_{\bar{X}}(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda = E[\bar{X}] = 2, \quad P(\bar{X} \leq 4) = e^{-2} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} \right) = e^{-2} \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \right) = 4e^{-2} \approx 0,9473$$

y = antal utsläpp under 3 månader

$$y \sim \text{Poi}(3 \cdot 2)$$

$$f_y(x) = \frac{e^{-3\lambda} \cdot (3\lambda)^x}{x!} = \frac{e^{-6} \cdot 6^x}{x!}$$

$$E[y] = 3\lambda = 6$$

$$P(y \geq 12) = 1 - P(y \leq 11) \approx 1 - 0,9499 \approx 0,02$$

tabell II, sid 725

3.72

'soft fail' - när en bit i datorminnet
byter läge spontant

ovanligt - i snitt 1 per 10^6 timmar/chip

Om chippet exponeras för α -partiklar
ökar däremot sannolikheten

Antag att sannolikheten då blir $1/1000$

- (i) Om ett chip med 6000 bitar exponeras för α -partiklar, vad blir sannolikheten för minst en 'soft fail'?
- (ii) Skulle du bli förvånad ifall fler än 5 inträffade?

X = antal 'soft flips'

$$\begin{cases} p = 1/1000 \\ n = 6000 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(6000, 1/1000) \\ &\sim \text{Poi}\left(\frac{6000}{1000}\right) = \text{Poi}(6) \end{aligned}$$

$\text{Bin}(n, p)$
approximeras
med $\text{Poi}(np)$
när

$$\begin{cases} n \text{ stort} \\ p \text{ litet} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \geq 20 \\ p \leq 0,05 \end{cases}$$

eller helst

$$\begin{cases} n \geq 100 \\ np \leq 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = \\ &= 1 - e^{-6} \cdot \frac{6^0}{0!} = 1 - e^{-6} \approx 0,9945 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) = \\ &= 1 - e^{-6} \left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!} + \frac{6^5}{5!} \right) = \\ &\approx 0,554 \end{aligned}$$