

4.4

 $\bar{X}$ = avstånd ; $X \sim U[a, b]$ Data:

10	4	11	12	8
8	9	10	9	13

a) Hitta en väntevärdesriktig (VVR) skattning medelavståndet.

$$E(\bar{X}) = E(X)$$

 $E(\bar{X})$ skattas av $\bar{X} = 9,4$ b) $\text{Var}(\bar{X})$ skattas av $S^2 = 3,54$

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} ; E(S^2) = \sigma^2 = \text{Var}(X)$$

c) Hitta vvr skattning av b .

$$X \sim U[a, b]$$

$$E[\bar{X}] = \frac{b}{2} \Rightarrow 2E[\bar{X}] = b$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Momentskattning av b : $2\bar{X} = 2 \cdot 9,7 = 19,4$ VVR? Ja, eftersom $E[2\bar{X}] = 2E[\bar{X}] = 2 \cdot \frac{b}{2} = b$ d) σ skattas av $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{3,54} \approx 1,89$ S vvr av σ om $E[S] = \sigma \Rightarrow E[\cancel{S}^2] = \sigma^2$

$$E[S^2] = \sigma^2$$

$$\text{Var}(S) = E[S^2] - (E[S])^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E[S])^2 = E[S^2] - \text{Var}(S) = \sigma^2 - \text{Var}(S) \neq \sigma^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[S] = \sqrt{\underbrace{\sigma^2 - \text{Var}(S)}_{\neq 0}} \neq \sigma \Rightarrow$$

 $\Rightarrow S$ ej VVR skattning.

Låt

$X_1, X_2, \dots, X_n$ vara ett stickprov från en Poissonfördelning med parameter λ

- Hitta momentskattningen av λ
- Hitta momentskattningen av λ , parametern för den underliggande Poisson-processer.

Momentmetoden skattar

$$E[\bar{X}^k] \text{ med } M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i^k$$

$$\Rightarrow E[\bar{X}] \text{ skattas med } \bar{\bar{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i$$

Vårt fall

$$E[\bar{X}] = \lambda \Rightarrow \lambda \text{ skattas med } \bar{\bar{X}}$$

$$\text{och } \hat{\lambda} = \frac{\bar{\bar{X}}}{s}$$

$$W \sim \text{Exp}(\beta) \quad \text{okänd}$$

Hitta ML-skattningen av β baserad på ett stickprov av storlek n .

Skiljer skattningen från momentmetodskattningen?

$W_1, \dots, W_n$ stickprov från $W \sim \text{Exp}(\beta)$

Täthet:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \quad ; x > 0$$

Likelihood:

$$L(\beta) = f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_n) = \beta^{-n} \cdot e^{-\sum_i x_i/\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell(\beta) = \ln L(\beta) = -n \ln \beta - \sum_i x_i/\beta \cdot \underbrace{\ln e}_1 =$$

$$= -n \ln \beta - \frac{1}{\beta} n \cdot \bar{x} =$$

$$= -n \left(\ln \beta + \frac{\bar{x}}{\beta} \right)$$

$$\Rightarrow \ell'(\beta) = -n \left(\frac{1}{\beta} - \frac{\bar{x}}{\beta^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x}}{\beta^2} = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\beta} = 1 \Rightarrow \hat{\beta} = \bar{x}$$

$\therefore \hat{\beta} = \bar{x}$ är ML-skattningen av β

Moment skattningen: $\hat{\beta} = \bar{x}$ ty $E[\bar{x}] = E(x) = \beta$

a) $\bar{X}$ stokastisk variabel med mgf $m_{\bar{X}}(t)$.

Låt $y = \alpha + \beta \bar{X}$

Visa att $m_y(t) = e^{\alpha t} m_{\bar{X}}(\beta t)$

Ledtråd: $m_y(t) = E[e^{ty}] = E[e^{(\alpha + \beta \bar{X})t}]$

$$\begin{aligned} m_y(t) &= E(e^{ty}) = E(e^{(\alpha + \beta \bar{X})t}) = \\ &= E(\underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{konstant}} \cdot e^{\beta \bar{X}t}) = e^{\alpha t} E(e^{\beta \bar{X}t}) = \\ &= e^{\alpha t} \cdot m_{\bar{X}}(\beta t) \end{aligned}$$

b) $\bar{X} \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 4)$

- mgf för $y = 8 + 3\bar{X}$?

- Vad har y för fördelning?

$$m_y(t) = e^{8t} \cdot m_{\bar{X}}(3t)$$

$$\boxed{(*) \quad m_{\bar{X}}(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}} = e^{10t + 2t^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_y(t) &\stackrel{\text{enl. a)}}{=} e^{8t} \cdot e^{10 \cdot 3t + 2(3t)^2} = \\ &= e^{8t} \cdot e^{30t + 18t^2} = e^{38t + 18t^2} = \\ &= e^{38t + \frac{36t^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \sim N(38, \sqrt{36}) = N(38, 6)$$

$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ oberoende stokastiska variabler
med mgf $m_{\bar{X}_i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Låt $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ vara reella tal
och

$$Y = a_0 + a_1 \bar{X}_1 + a_2 \bar{X}_2 + \dots + a_n \bar{X}_n$$

Visa att mgf för Y ges av

$$m_Y(t) = e^{a_0 t} \prod_{i=1}^n m_{\bar{X}_i}(a_i t)$$

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E(e^{tY}) = E(e^{a_0 t + a_1 t \bar{X}_1 + \dots + a_n t \bar{X}_n}) = \\ &= e^{a_0 t} \cdot E(e^{a_1 t \bar{X}_1 + \dots + a_n t \bar{X}_n}) \stackrel{\text{ober}}{=} \\ &= e^{a_0 t} E(e^{a_1 t \bar{X}_1}) \cdot \dots \cdot E(e^{a_n t \bar{X}_n}) = \\ &= e^{a_0 t} \cdot m_{\bar{X}_1}(a_1 t) \cdot \dots \cdot m_{\bar{X}_n}(a_n t) = \\ &= e^{a_0 t} \prod_{i=1}^n m_{\bar{X}_i}(a_i t) \end{aligned}$$

(81)

(41)

 $\bar{x}$ = responstid

$$n = 30$$

a) blad-stam diagram

1.2	6	8								2
1.3	0	4								2
1.4	8	9	3	3	3	8	7	6		8
1.5	1	3	2	1	6	1	5	3	7	10
1.6	0	4	8	4	0	1	5			7
1.7	4									1
										30

Vemmer vi har normalfördelning?

" Nej, tyngdpunkten känns lite till höger, tjockare svans till vänster "

b) Väntevärdesriktig punktskattning av σ^2 :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \quad E[S^2] = \sigma^2$$

$$\bar{x} = 1,51$$

$$S = 0,1136$$

$$S^2 = 0,0129$$

c) 95% konf. intervall för σ^2 .

$$(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

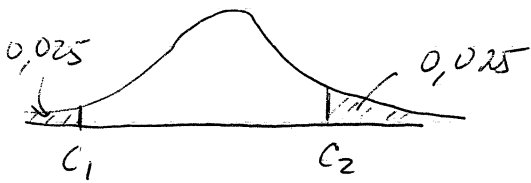
konf grad
0,05

$$P(\underbrace{\chi^2_{1-\alpha/2}}_{C_1} \leq (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \underbrace{\chi^2_{\alpha/2}}_{C_2}) = 1 - \alpha$$

8.1 forts

(42)

Ur tabell IV: $\chi^2_{29} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 16,0 & 0,025 \\ C_2 = 45,7 & 0,975 \end{cases}$



$\xrightarrow{0,025} \xrightarrow{0,975}$

$$P(C_1 \leq (n-1)S^2/\sigma^2 \leq C_2) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{C_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{C_1}\right) = 1-\alpha$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \frac{29 \cdot 0,0129}{45,7} \approx 0,00819 & & \frac{29 \cdot 0,0129}{16,0} \approx 0,02338 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Konf. int. : } 0,008 \leq \sigma^2 \leq 0,023 \quad (95\%)$$

$$d) \quad 0,09 \leq \sigma \leq 0,15 \quad (95\%)$$

e) Påstående responstidens standardavvikelse är större än 0,2 sekunder ($\sigma > 0,2$)

Kommentar?

utanför konfidenstervall $\Rightarrow$ osannolikt.

8.10

Borrar genom arktisk ismassa

 $\bar{X}$ = borrarat djup per timme

Obs: 10 test hål (enhet: fot)

2,0 1,7 2,6 1,5 1,4

2,1 3,0 2,5 1,8 1,4

a) Hitta $\bar{X}$, S^2 och S : $n=10$

$$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i = 2,0$$

$$S^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 0,302$$

$$S = 0,5497$$

b) 90% konfidensintervall för medeldjupet (μ)

Vi förutsätter att data är normalfördelad:

$$\mu = \bar{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

 σ^2 okänd

10-1 = antal frihetsgr.

Tabellvärde ur tabell VII: $t_{0,05}(9) = 1,833$ $\uparrow$
 $\alpha/2$ där $1-\alpha = 0,90$

Konfid. intervall:

$$\mu = 2,0 \pm 1,833 \cdot \frac{0,5497}{\sqrt{10}} \Rightarrow 2,0 \pm 0,32$$

$$1,68 \leq \mu \leq 2,32 \quad (90\%)$$

Process ger 5% defekta objekt.

Om andelen defekta övergår 5% måste processen stängas ner och justeras.

a) Sätt upp de hypoteser som behövs för att upptäcka situation med för stor andel defekta ($> 5\%$)

$$P(\text{fel}) = 0,05 = p$$

$$H_0: p \leq 0,05 \quad \text{mot} \quad H_1: p > 0,05$$

b) Diskutera praktiska konsekvenser av typ I - och typ II - fel

Typ I: Förrasta H_0 då H_0 är sann

Typ II: Ej förrasta H_0 då H_0 är falsk (H_1 är sann)

c) $n = 100$, $\bar{X}$ = antal defekta $\Rightarrow \bar{X} \sim \text{Bin}(100, p)$

$x = 7$ = obs antal defekta Anv norm. approx

$$\Rightarrow \sim N(100p, \sqrt{100p(1-p)})$$

Förrasta då $\hat{p} = \frac{x}{n} > c$

$$E\left[\frac{\bar{X}}{n}\right] = \frac{1}{n} E[\bar{X}] = p$$

$$p_0 = P\left(\frac{x}{n} \geq 0,07 \mid p = 0,05\right) =$$

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{X}}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} n p(1-p) = p(1-p)$$

p-värde

$$= P\left(\underbrace{\frac{\frac{x}{n} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}}_{\sim N(0,1)} \geq \frac{0,07 - 0,05}{\sqrt{0,05 \cdot 0,95/100}}\right) \approx$$

$$\approx P(Z \geq 0,918) \approx 1 - \Phi(0,92) = 1 - 0,8212 = 0,18$$

↑
Tabell V

$$\bar{X} = \text{antal defekta} \sim \text{Bin}(100, p) \stackrel{\text{approx}}{\sim} N(100p, \sqrt{100p(1-p)})$$

$$\frac{\bar{X}}{n} = \text{andelen defekta} \overset{\text{appr.}}{\sim} N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$$

$$\text{fy } E\left[\frac{\bar{X}}{n}\right] = p \quad \text{och} \quad \text{Var}\left(\frac{\bar{X}}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Teststatistika:

$$T = \frac{\frac{\bar{X}}{n} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1)$$

Konfidensgrad: $\alpha = 0,05$

Hypoteser: ($p_0 = 0,05$)

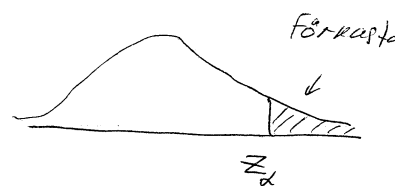
$H_0: p \leq 0,05$ mot $H_1: p > 0,05$

Om H_0 sann gäller

$$P_{H_0}(T < Z_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow \text{förrkasta } H_0 \text{ om } T > Z_\alpha$$

Vi har observerat

$$\frac{\frac{\bar{X}}{n} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \left\{ \begin{array}{l} X = 7 \\ n = 100 \\ p_0 = 0,05 \end{array} \right\} = 0,917$$



att jämföras med $Z_\alpha = Z_{0,05} = 1,645$

$\therefore T = 0,917 < Z_\alpha = 1,645 \Rightarrow$ Förrkasta ej H_0 på 5%-nivån

8.39)

46

$$H_0: \mu = 2,5 \text{ alt. } \mu \geq 2,5$$

$$H_0: \mu < 2,5$$

Testa på nivån $\alpha = 0,05$

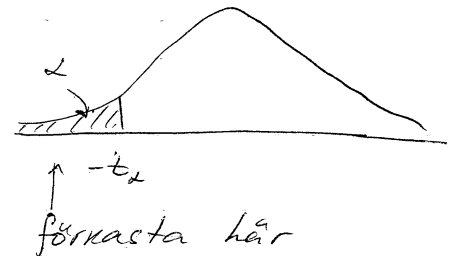
Stickprov $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{16}$ där $\bar{X}$ = ljudnivå (dB)

Bilda teststatistika

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Antag H_0 sann, då gäller

$$P_{H_0} \left(-t_\alpha \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$



$$\text{för } t_{n-1, \alpha} = t_{15, 0,05} = 1,753$$

V_i har observerat (under H_0)

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{1,8 - 2,5}{0,8/\sqrt{16}} = -3,5 < -t_\alpha = -1,753$$

$\therefore$ Förkasta H_0 på nivån $\alpha = 0,05$

p-värde = den lägsta nivå på vilken vi kan förkasta $H_0 = P_{H_0}(T \leq -3,5) < 0,005$

Sannolikh. för typ I-fel:

$$P(T \leq -t_\alpha) = 0,05$$

8.44)

(47)

Data:

6,2	6,5	7,6	7,7	7,0
7,0	7,2	6,8	7,5	8,1
7,1	7,0	7,1	7,8	8,5

Påstående: $\mu = 7$ dvs $\mu = 7$

Träsidigt test med hypoteser:

$$H_0: \mu = 7 = \mu_0 \quad \text{mot} \quad H_1: \mu \neq 7 = \mu_0$$

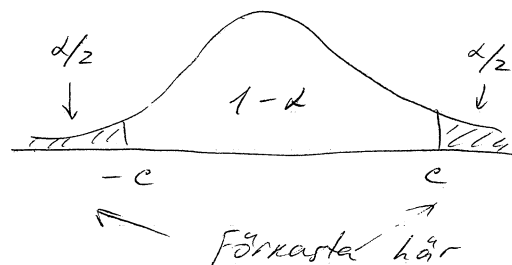
Teststatistika: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Konfidensgrad: $\alpha = \begin{cases} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,10 \end{cases}$

Under H_0 gäller: $P(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Ur tabell för t -fördeln:

$$t_{\alpha/2} = \begin{cases} 2,977 & \alpha = 0,01 \\ 2,145 & \alpha = 0,05 \\ 1,761 & \alpha = 0,10 \end{cases}$$



Förkasta H_0 om $T > c$ eller $T < -c$

Våra observationer $\left\{ \begin{array}{l} n = 15 \\ \bar{X} = 7,273 \\ S = 0,6017 \\ \mu_0 = 7 \end{array} \right\}$ ger

$T = 1,36 < t_{\alpha/2}$ då $\alpha \leq 0,10 \Rightarrow$ Kan ej förkasta H_0 .