9.2)

$n = 193$ felaktiga vid test
varav $f = 75$ mekanskt fel

a) Punktskattning av p (proportion mek fel):

$$\hat{p} = \frac{f}{n} = \frac{75}{193} \approx 0,389$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{vid mek fel} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\hat{p} = \bar{x} = \frac{1}{193} \sum_{i=1}^{193} X_i$$

vvr-skattn av p ty
$X_i \sim Bin(1,p) \Rightarrow E[X_i] = p$

b) 95% konfid interv för p

$$\hat{p} = \bar{X} \overset{approx}{\sim} N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{approx.}{\sim} N(0,1)$$

ty $\Phi(1{,}96) = 0{,}975$

$$0{,}95 = \mathbb{P}\left(-1{,}96 \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 1{,}96\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\hat{p} - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

95% konf int. för p:

$$p = \hat{p} \pm 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}389 \pm 0{,}069$$

c) Hur stort stickprov behövs för att skatta p inom 0,03 med 95%

$$0{,}03 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \iff \left(\frac{0{,}03}{1{,}96}\right)^2 = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$$

$$\iff n = \frac{0{,}389(1-0{,}389)}{\left(\frac{0{,}03}{1{,}96}\right)^2} = 1014{,}52$$

$$\boxed{\text{Välj } n \geq 1015}$$

9.16)

a) Hypoteser:

$H_0: \quad p \le p_0 = 0{,}8$ mot

$H_1: \quad p > p_0 = 0{,}8$

b) Signifikansnivå: $\alpha = 0{,}01$

Teststatistika:

$$T = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{\text{approx}}{\sim} N(0,1) \quad \text{då } H_0 \text{ är sann}$$

Förkasta H_0 om $\hat{p}$ stor, dvs om

$$T > z_\alpha = z_{0,01} = 2{,}33$$

Under H_0

$$P_{H_0}(T > 2{,}33) = 0{,}01$$

dvs

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > 2{,}33$$

Förkasta H_0 om

$$\Rightarrow \quad \hat{p} > p_0 + 2{,}33\sqrt{p_0(1-p_0)/n} =$$
$$= 0{,}8 + 2{,}33\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2/n} =$$
$$= 0{,}8 + 2{,}33\sqrt{0{,}16/n} =$$
$$= 0{,}8 + 2{,}33 \cdot 0{,}4/\sqrt{n} = 0{,}8 + 0{,}932/\sqrt{n} = c$$

kritiska punkten

c) $n = 150$, $f = 133$ $\Rightarrow \hat{p} = \frac{f}{n} = 0{,}89$

$$c = 0{,}8 + 0{,}932/\sqrt{150} = 0{,}876$$

$\Rightarrow \hat{p} = 0{,}89 > 0{,}876 = c \Rightarrow$ Förkasta H_0 på 1% nivån

9.18)

$n_1 = 50 \quad f_1 = 15 \quad \hat{p}_1 = \frac{15}{50} = 0{,}30$

$n_2 = 60 \quad f_2 = 15 \quad \hat{p}_2 = \frac{15}{60} = 0{,}25$

a) Hitta punktskattningar för p_1, p_2 och $p_1 - p_2$

$\hat{p}_1 = \frac{f_1}{n_1} = \frac{15}{50} = 0{,}30$

$\hat{p}_2 = \frac{f_2}{n_2} = \frac{15}{60} = 0{,}25$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}30 - 0{,}25 = 0{,}05$

VVr ty $E[\hat{p}_1 - \hat{p}_2] = E[\hat{p}_1] - E[\hat{p}_2] = p_1 - p_2$

p_1 = andel typ I

X_1 = antal av 50 av typ I

$X_1 \sim Bin(50, p_1)$

$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{x_1}{n_1} = \frac{15}{50} = 0{,}3$

$E[\hat{p}_1] = E[X_1/n_1] = E[X_1]/n_1 = \frac{n_1 p_1}{n_1} = p_1$

b) 95% konfid. intervall för $p_1 - p_2$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \overset{approx}{\sim} N\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right)$$

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \overset{approx.}{\sim} N(0,1)$$

$$\Rightarrow \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

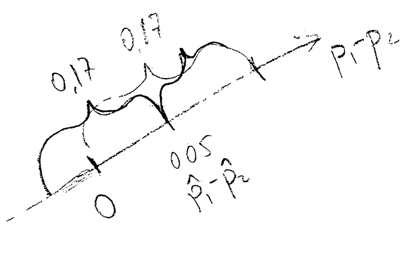
$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$\Rightarrow 0{,}05 \pm 0{,}17$

c) Påstående. typ I större prop än typ II

Kommentar: I > II $\Rightarrow p_1 - p_2 > 0$

eftersom 0 är med i intervallet kan vi inte påstå att ~~skillnaden är~~ typ I > typ II



9.26)

optisk fiber

p_1 = andelen fel vid användning av karbon

p_2 = andelen fel vid användning av laserteknik

Man byter till laserteknik om den reducerar andelen fel med mer än 0,02

a) Sätt upp noll-mothypotes för att stödja lasertekniken

H_0 : $p_1 - p_2 = 0{,}02$

H_1 : $p_1 - p_2 > 0{,}02$

alt $p_1 - p_2 \leq 0{,}02$

b) Hitta kritiska värdet för test på nivå $\alpha = 0{,}05$

Om H_0 sann är

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0{,}02}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \overset{approx}{\sim} N(0,1)$$

Förkasta H_0 på 0,05%-nivå om

$Z > 1{,}645$ (ensidigt test)

$$\Leftrightarrow \hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0{,}02 + 1{,}645\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

c) 100 test för varje metod utfördes

Resultat

- 5 fel med Karbon
- 1 fel med laser

$n_1 = n_2 = 100$

$$\hat{p}_1 = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}04$$

9 26 forts)

Kritiskt värde:

$$0{,}02 + 1{,}645\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} =$$

$$= 0{,}02 + 0{,}039 = 0{,}059$$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}04 < 0{,}059 \Rightarrow$ Förkasta ej

d) Vilket typ-fel riskerar du?
Typ II-fel (förkasta ej då H_0 är falsk)

Innebär att vi inte börjar använda nya metoden som egentligen är bättre

10.8

Kostnaden att laga en fiberoptisk komponent kan bero på i vilken nivå av produktionen som den går sönder.

Data:

Systemfel	Fältfel
$n_1 = 21$	$n_2 = 25$
$\bar{x}_1 = \$65$	$\bar{x}_2 = \$120$
$S_1^2 = 25$	$S_2^2 = 100$

a) Man tror att variansen i kostnaden för reparationer i fältet är större än i system. Sätt upp de hypoteser som behövs för att statistiskt styrka påståendet.

$$H_0: \sigma_2 \leq \sigma_1 \quad \text{mot} \quad H_1: \sigma_2 > \sigma_1$$

b) Kritisk gräns för $\alpha = 0{,}10$ - nivåstest? Testa H_0 på ovanstående data

Då $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ är $(n_1 + n_2 - 2)\frac{S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1+n_2-2}$

där

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = 65{,}91 \Rightarrow S_p = 8{,}1$$

$$(n_1+n_2-2)S_p^2 = (n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2 = 2900$$

Förkasta H_0 då $\frac{S_2^2}{S_1^2} \geq c$

Vi vet att

$$\frac{S_2^2}{S_1^2} \sim F(\underbrace{n_2-1}_{24}, \underbrace{n_1-1}_{20})$$

10.8 förts.

$(1-\alpha) = 0{,}90$

$0{,}10 = \mathbb{P}\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} \geq c\right)$ $\left(\Leftrightarrow 0{,}90 = \mathbb{P}\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} \leq c\right)\right)$

Tab. IX, s 748

$c = 1{,}767$

$\Rightarrow \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{100}{25} = 4 > c \Rightarrow$

Förkasta H_0 på 10 %-nivån.

10.14)

Testar gammal och ny scanner / streckkods-läsare

Data:

Ny	Gammal
$n_1 = 61$	$n_2 = 61$
$\bar{X}_1 = 40$	$\bar{X}_2 = 29$
$S_1^2 = 24,9$	$S_1^2 = 22,7$

a) Testa $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ mot $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ på $\alpha = 0,2$ -nivån för att kontrolera att ('poolning') sammanvägning är OK

Om $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ så är

$$T = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1} = F_{60,60}$$

$$T = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$$

$\Rightarrow$ $P(T \leq 1,395) = 0,90$ (Tabell IX, s.751)

$P(T \leq 0,717) = 0,10$ (tabell IX, s.746)

$\Rightarrow$ $P(0,717 \leq T \leq 1,395) = 0,8$

Dvs, om H_0 sann så är

$$P\left(0,717 \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq 1,395\right) = 0,8$$

Förkasta H_0 på 0,2-nivån (20%) om

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} < 0,717 \quad \text{eller} \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} > 1,395$$

Vi har att $\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{24,9}{22,7} = 1,1$ $\Rightarrow$ Kan ej förkasta H_0

b) Alt. 1: Testa 2ggr: $\rightarrow$ $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ mot $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ på nivån $\alpha = 0,01$

$\rightarrow$ $H_0: \sigma_2^2 \leq \sigma_1^2$ mot $H_1: \sigma_2^2 > \sigma_1^2$ på nivån $\alpha = 0,01$

Alt. 2: Konfidensintervall $\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

10.14 forts)

b) Hitta S_p^2:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{60 \cdot 24,9 + 60 \cdot 22,7}{120} = 23,8$$

c) 95% Konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

är ett $(1-\alpha) \cdot 100\%$ konfid inten för $\mu_1 - \mu_2$

$$\therefore \mu_1 - \mu_2 = 40 - 29 \pm \underbrace{t_{0{,}025, 120}}_{\text{anv. } t_{0{,}025, \infty} = 1{,}96} \sqrt{23{,}8\left(\frac{1}{61} + \frac{1}{61}\right)} =$$

$$= 11 \pm 1{,}73 \qquad (0{,}95)$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in (9{,}27 \; , \; 12{,}73)$$