χ^2-fördelningen

Låt $Z_1, \ldots, Z_n$ vara oberoende $\mathrm{N}(0,1)$-variabler. Den stokastiska variabeln $Y^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ är χ^2-fördelad med n frihetsgrader. Detta skrives $Y^2 \sim \chi^2(n)$.

Kvantilen $\chi^2_{\gamma,\alpha}$ definieras av att $P\left[Y^2 > \chi^2_{\gamma,\alpha}\right] = \alpha$, där $Y^2 \sim \chi^2(\gamma)$.

Theorem 8.1.1: Distribution of $(n-1)S^2/\sigma^2$

Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from a distribution with mean μ and standard deviation σ. Then

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Theorem 8.1.2: $100(1-\alpha)\%$ confidence interval on σ^2

Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from a distribution with mean μ and standard deviation σ. The lower and upper bounds, L_1 and L_2, respectively, for a $100(1-\alpha)\%$ confidence interval on σ^2, are given by

$$L_1 = (n-1)S^2/\chi^2_{n-1,\alpha/2} \quad \text{and} \quad L_2 = (n-1)S^2/\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$$

Vill man ha ett konfidensintervall av typen $\sigma^2 \le L_2$ väljer man

$$L_2 = (n-1)S^2/\chi^2_{n-1,1-\alpha}$$

Konfidensgraden blir då $1-\alpha$.

Exempel

För att undersöka precisionen hos en metod att mäta induktanser gjorde man 20 mätningar av induktansen hos en viss spole. Man erhöll stickprovsvariansen $s^2 = 3.30$.

Låt $\alpha = 0.05$. Vi förutsätter normalfördelade fel.

1) Ur tabell fås att $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \chi^2_{19,0.975} = 8.91$ och att $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{19,0.025} = 32.9$. Således har intervallestimatet

$$\left(\frac{19 \cdot 3.30}{32.9} =\right) \quad 1.9 \le \sigma^2 \le 7.0 \quad \left(= \frac{19 \cdot 3.30}{8.91}\right)$$

konfidensen 95%.

2) Ur tabell fås att $\chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{19,0.05} = 10.1$. Således har intervallestimatet

$$\sigma^2 \le 6.2 \quad \left(= \frac{19 \cdot 3.30}{10.1}\right)$$

konfidensen 95%.

Vill man istället intervallskatta σ gör man som ovan och drar kvadratroten ur alla led.

Students t-fördelning

Låt $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ och låt $Y^2 \sim \chi^2(\gamma)$. Den stokastiska variabeln $T = Z/(Y/\sqrt{\gamma})$ är t-fördelad med γ frihetsgrader. Detta skrives $T \sim t(\gamma)$.

Kvantilen $t_{\gamma,\alpha}$ bestäms ur $P\left[T > t_{\gamma,\alpha}\right] = \alpha$, där $T \sim t(\gamma)$.

Theorem 8.2.1: Distribution of $(\bar{X}-\mu)/(S/\sqrt{n})$

Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from a distribution with mean μ and standard deviation σ. Then

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Theorem 8.2.2: $100(1-\alpha)\%$ confidence interval on μ

Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from a distribution with mean μ and standard deviation σ. A $100(1-\alpha)\%$ confidence interval on μ is given by

$$\bar{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\, S/\sqrt{n}$$

Exempel

En metallurg gjorde fyra bestämningar av mangans smältpunkt, varvid han erhöll följande smältpunkter i grader Celcius:

1269 1271 1263 1265

Punkt- och intervallskatta mangans smältpunkt. J.f.r. med tabellvärdet 1269°C.

Uträkning ger $\bar{x} = 1267$, $s = 3.651$ och $n = 4$.

Medelvärdet $\bar{x} = 1267$ är en punktskattning av smältpunkten om mätmetoden är väntevärdesriktig.

Vi förutsätter även att den ger normalfördelade fel. Om inget annat säga väljes normalt konfidensgraden 95%. Av pedagogiska skäl väljer jag emellertid att räkna med konfidensgraden 99%. Då är $\alpha = 0.01$. Ur tabell fås att $t_{n-1,\alpha/2} = t_{3,0.005} = 5.841$, vilket ger

$$t_{n-1,\alpha/2}\, s/\sqrt{n} = 5.841 \cdot 3.651/\sqrt{4} = 10.7$$

Således är $\mu = 1267 \pm 10.7$ eller

$$\mu \in [1256.3,\ 1277.7]$$

ett intervallestimat för mangans smältpunkt med konfidens 99%.

Notera att tabellvärdet 1269 hör till intervallet.

I jordprovsexemplet (se Ch 7, OH no 2, 9) fick vi i $n = 5$ mätningar av kromhalten medelvärdet $\bar{x} = 233.64$ och standardavvikelsen $s = 28.868$. Marken bedöms som förorenad om $\mu > 200$ och vi ska se om så är fallet.

Vår forsknings- eller *alternativhypotes* H_1 är därför $\mu > 200$.

Vår *nollhypotes* H_0 är motsatsen, d.v.s. att $\mu \leq 200$

Våra två hypoteser är alltså

$$H_0 : \mu \leq 200$$
$$H_1 : \mu > 200$$

Vårt s.k. *nollvärde* är $\mu_0 = 200$ och vi ska strax se att man kan räkna som om nollvärdet μ_0 vore det sanna värdet av μ.

Vi behöver en beslutsregel, d.v.s. bestämma oss för när vi ska tro att alternativhypotesen $H_1 : \mu > \mu_0$ är sann. Vi säger då att vi *förkastar nollhypotesen*. Vi förstår att det då finns en risk att vi felaktigt förkastar. Denna typ av fel kallas för *typ-I-fel* (se definition 8.3.1) och vi ska gardera oss mot detta fel genom att välja en beslutsregel så att sannolikheten att vi gör ett typ-I-fel är liten, t.ex. 5% eller 1%.

Den maximalt tillåtna sannolikheten att begå ett typ-I-fel kallas för testets *signifikansnivå* och betecknas α.

Rent generellt gäller att ju större $\bar{x}$ är, desto rimligare verkar påståendet att $\mu > \mu_0$. Vi väljer därför att "förkasta H_0 då $\bar{x} \geq c$." Syftet med det som följer är att bestämma c så att sannolikheten att förkasta blir mindre än α om nollhypotesen $H_0 : \mu \leq \mu_0$ är sann (α är alltså risken att vi gör ett typ-I-fel).

Låt $c = \mu_0 + t_{n-1,\alpha}\, s/\sqrt{n}$.

Under $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gäller då att

$$\begin{aligned} P[\bar{X} \geq c] &= P[\bar{X} \geq \mu_0 + t_{n-1,\alpha}\, S/\sqrt{n}] \\ &= P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0-\mu}{S/\sqrt{n}} + t_{n-1,\alpha}\right] \\ &\leq P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \geq t_{n-1,\alpha}\right] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

eftersom

$$\frac{\mu_0-\mu}{S/\sqrt{n}} \geq 0 \quad \text{och} \quad \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Notera nu att

$$\bar{x} \geq c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_{n-1,\alpha}$$

Förkastar vi då

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_{n-1,\alpha}$$

gäller alltså att testet håller (signifikans-) nivån α.

I vårt exempel med jordproverna får vi

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{233.64-200}{28.868/\sqrt{5}} = 2.606$$

Vi jämför med $t_{4,0.05} = 2.132$ och $t_{4,0.01} = 3.747$ och ser att hade vi valt signifikansnivån $\alpha = 0.05$ så hade vi kunnat förkasta $H_0 : \mu \leq 200$, men att om vi hade valt att testa på den säkrare nivån $\alpha = 0.01$ så hade vi inte fått något förkastande.

Vi räknar ut sannolikheten för en minst lika extrem observation som den vi fick, d.v.s.

$$P\left[\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq 2.606\right] = 0.030$$

Detta kallas för testets *observerade signifikansnivå* eller *P-värde*. Observera att P-värdet räknas ut under förutsättning att nollvärdet μ_0 är det sanna väntevärdet. Generellt gäller att om P-värdet $\leq \alpha$, så kan vi förkasta nollhypotesen på nivån α.

Antag att vi istället hade velat påvisa $\mu < \mu_0$. Då hade ett analogt resonemang lett till att man kan förkasta på nivån α då

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq -t_{n-1,\alpha}$$

Och om vi hade velat påvisa att $\mu \neq \mu_0$, så hade nivå-α-regeln istället blivit förkasta då

$$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{n-1,\alpha/2}$$

Definition 8.3.1: Type I error and level of significance α

Consider a test of a hypothesis. A Type I error is an error that is made when the null hypothesis is rejected when, in fact, true. The maximal probability of committing a Type I error is called the level of significance of the test and is denoted by α.

Definition 8.3.2: Type II error and β

Consider a test of a hypothesis. A Type II error is an error that is made when the null hypothesis is not rejected when, in fact, false. The probability of committing a Type II error is denoted β.

Definition 8.3.3: Power

Consider a test of a hypothesis. The probability that the null hypothesis will be rejected when, if fact, false is called the power of the test and equals $1 - \beta$.

Example 8.6.1

One random variable studied while designing the front-wheel-drive half-shaft of a new model automobile is the displacement (in mm) of the constant velocity (CV) joints. With the joint angle fixed at 12°, 20 simulations were conducted, resulting in the following data:

6.2 1.9 4.4 4.9 3.5 4.6 4.2 1.1 1.3 4.8
4.1 3.7 2.5 3.7 4.2 1.4 2.6 1.5 3.9 3.2

For these data $\bar{x} = 3.39$ and $s = 1.410$. Engineers designing the front-wheel-drive half-shaft claim that the standard deviation in the displacement of the CV shaft is less than 1.5 mm.

Do these data support the contention of the engineers?

Example 8.6.1 (forts)

Vi ska visa att standardavvikelsen $\sigma < 1.5$ och ska därför testa

$$H_0 : \sigma \geq 1.5 \quad \text{mot} \quad H_1 : \sigma < 1.5$$

Nollvärdet är $\sigma_0 = 1.5$. Vi ska förkasta H_0 då s är litet, d.v.s då $(n-1)s^2/\sigma_0^2$ är litet, ty ju mindre s är, desto troligare är H_1. Vi förutsätter att observationerna är normalfördelade.

Nivå-α-regeln blir förkasta H_0 då $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha}$.

Insättning av observerade värden ger

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 1.41^2}{1.5^2} = 16.79$$

Jämför med

$$\chi^2_{19,0.95} = 10.1, \quad \chi^2_{19,0.90} = 11.7, \quad \chi^2_{19,0.75} = 14.6, \quad \chi^2_{19,0.50} = 18.3$$

Vi kan alltså inte ens förkasta H_0 på nivån $\alpha = 0.25$.
P-värdet ligger mellan 0.25 och 0.50.

Kvantil- och "probability"-plott

Börja med att sortera data $x_1, \ldots, x_n$ i storleksordning:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$$

och noterar att vi medelst ett symmetriargument kan motivera ihopkopplingen av $x_{(i)}$ med sannolikheten $(i-0.5)/n$.

Låt z_i vara $(i-0.5)/n$-kvantilen i $\mathrm{N}(0,1)$-fördelningen. Då

$$\Phi(z_i) = \frac{i-0.5}{n}$$

I en kvantil-plott plottas de s.k. empiriska kvantilerna $x_{(i)}$ mot de teoretiska, vilket i normalfördelningsfallet är $z_1, \ldots, z_n$.

I en "probability plot" plottas istället $\Phi\left(\dfrac{x_{(i)} - \widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}}\right)$ mot $(i-0.5)/n$.

Kvantil- och probability-plott av data från exempel 8.6.1

Sortera data i storleksordning:

$$1.1, \; 1.3, \; 1.4, \; \ldots, \; 6.2$$

Motsvarande Φ-värden är

$$0.052, \; 0.070, \; 0.080 \; \ldots, \; 0.977$$

och motsvarande sannolikheter är

$$1/40, \; 3/40, \; 5/40, \; \ldots, \; 39/40$$

Ur t.ex tabell eller medelst användande av matlab-kommandot "norminv" fås att motsvarande $\mathrm{N}(0,1)$-kvantiler är

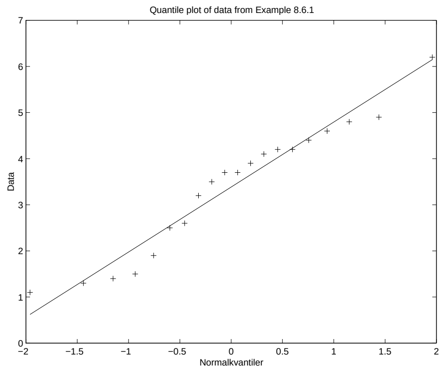
$$-1.96, \; -1.44, \; -1.15, \; \ldots, \; 1.96$$

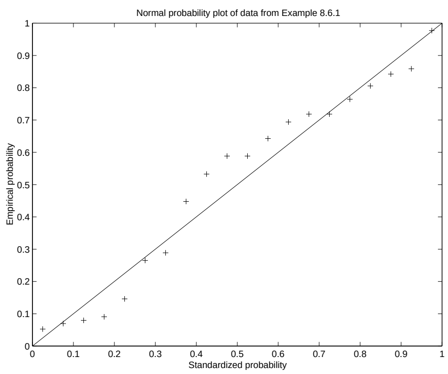
Kvantilplotten består av punkterna

$$(-1.96, 1.1), \; (-1.44, 1.3), \; (-1.15, 1.4), \; \ldots, \; (1.96, 6.2)$$

Och probability-plotten av punkterna

$$(0.025, 0.052), \; (0.075, 0.070), \; (0.125, 0.080), \; \ldots, (0.975, 0.977)$$


Quantile plot of data from Example 8.6.1
Data
Normalkvantiler
0
1
2
3
4
5
6
7
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2


Normal probability plot of data from Example 8.6.1
Empirical probability
Standardized probability
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1