

Empiri

I verkligheten har vi n oberoende observationer $x_1, \dots, x_n$ av någon variabel x , som är det vi observerar när vi mäter en parameter θ .

Teori

I teorin har vi ett stickprov ("random sample") $X_1, \dots, X_n$ från X 's fördelning och denna har åtminstone en okänd parameter θ . Det kan finnas fler.

Fördelningen för X ska spegla de variationer vi ser i x då vi mäter θ .

Om observationerna är tider, är kanske $\text{Exp}(\lambda)$ en bra modell.

Om observationerna är någon slags mätvärden är ofta $N(\mu, \sigma)$ en bra modell. Man tänker sig då att

$$X = \mu + \sigma \epsilon \quad \text{där } \epsilon \sim N(0, 1)$$

Om man räknar ovanliga händelser i ett tidsintervall av längd t är ofta $\text{Poi}(\lambda t)$ en bra modell. Ofta har man bara en observation x .

Om man vill skatta en okänd sannolikhet p ska man använda $\text{Bin}(n, p)$ -modellen. Här observerar man

$$x = \sum_{i=1}^n x_i$$

där $x_1, \dots, x_n$ är oberoende $\text{Ber}(p)$ -observationer.

Tre exempel

I syfte att estimeras tillförlitligheten av 16-kbit dynamiska RAM av ett visst fabrikat, valde man slumpmässigt ut 100 st som testades under 1000 timmars kontinuerlig drift. Man fann att $x = 91$ av de 100 testobjekten fungerade felfritt under hela testtiden. Teoretisk modell för detta försök är $X \sim \text{Bin}(n, p)$, där $n = 100$ och p är sannolikheten att ett RAM av den testade typen fungerar felfritt de första 1000 driftstimmarna.

Man har i 4 lika stora vattenprov nedströms en avfallsanläggning räknat antalet kolibakterier och fått

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 15, \quad x_3 = 16, \quad x_4 = 17$$

Teoretisk modell för detta försök skulle kunna vara $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.

Man har i 5 oberoende jordprov i en gammal industritomt mätt kromhalten i mg/kg och fått

$$x_1 = 237.5, \quad x_2 = 201.9, \quad x_3 = 253.6, \quad x_4 = 258.3, \quad x_5 = 216.9$$

Teoretisk modell för detta försök skulle kunna vara $X \sim N(\mu, \sigma)$. Även $\ln X \sim N(\mu, \sigma)$ skulle kunna vara en bra modell.

Ytterligare ett exempel

Man har under 1350 timmar (drygt 56 dygn) studerat belastningen y_i av ett visst tekniskt system. Under denna tidsrymd gick belastningen över en kritisk nivå $u = 5$ sammanlagt $n = 8$ gånger. Maximala nivåer x_i under dessa 8 överskridanden var

$$6.85 \quad 5.11 \quad 5.61 \quad 5.28 \quad 6.87 \quad 6.40 \quad 5.16 \quad 5.12$$

Teoretisk modell för detta försök skulle kunna vara att överskridandena sker enl en Poissonprocess N med intensitet λ [st/dygn] och att deras resp maximala nivåer X är Paretofördelade, vilket innebär att tätheten är

$$f(x) = \frac{\alpha}{u} \left(\frac{x}{u} \right)^{-(\alpha+1)} \quad \text{för } x > u$$

för något $\alpha > 0$.

Exempel: Estimator och estimat

Vi skall använda det observerade (empiriska) medelvärdet $\bar{x}$ till att *estimeras* parametern $\mu = E[X]$. I vardagligt tal säger man ofta att man *skattar* μ . Vi kallar $\bar{x}$ för μ 's *estimat*.

Att $\bar{x}$ är μ 's estimat skrives $\hat{\mu} = \bar{x}$.

Motsvarande stokastiska variabel

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

kallas μ 's *estimator*.

Att $\bar{X}$ är vår estimator av μ skrives $\hat{\mu} = \bar{X}$.

Estimatet är alltså det uträknade (observerade) värdet, medan estimator är en stokastisk variabel.

I svenskan använder man ofta ordet *skattning* och sammanhanget avgör om man avser den stokastiska variabeln eller det observerade värdet.

Definition: Estimator and estimate

A statistic used to approximate or estimate a population parameter θ is called a *(point) estimator* for θ and is denoted by $\hat{\theta}$ or $\tilde{\theta}$ or θ^* or ...; the numerical value assumed by this statistic when evaluated for a given sample is called a *(point) estimate* for θ .

Att statistikan $\hat{\theta}$, som vi använder som estimator av θ , beror av stickprovet $X_1, \dots, X_n$ brukar man inte skriva ut explicit.

Exempel

Antag att vi vid n oberoende mätningar av en viss anläggnings driftstid (tiden från start till nästa produktionsstopp) erhåll medelvärde $\bar{x} = 732.9$ timmar. Låt μ beteckna den förväntade (teoretiska) drifttiden. Då är 732.9 timmar vårt estimat av μ och vi skriver

$$\hat{\mu} = 732.9$$

Definition 7.1.1: Väntevärdesriktighet

En estimator $\hat{\theta}$ sägs vara väntevärdesriktig för θ , om

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

Det är önskvärt att en estimator $\hat{\theta}$ har liten varians. Ju mindre $\text{Var}[\hat{\theta}]$ är, desto bättre är estimatorm.

Theorem 7.1.1, 7.1.2

Stickprovsmedelvärdet $\bar{X}$ är en väntevärdesriktig estimator av μ . Dess varians är

$$\text{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Definition 7.1.2: Standard error of the mean

The standard deviation of $\bar{X}$ is given by $\sigma/\sqrt{n}$ and is called the standard error of μ .

Theorem 7.1.3

Stickprovsvariansen S^2 är en väntevärdesriktig estimator av σ^2 .

I exemplet med överskridandedata (se OH no 3) förekommer en parameter α . Vi ska nu med två olika metoder härleda en skattning av α .

A: Momentmetoden

Vi börjar med att m.h.a. X s täthet

$$f(x) = \frac{\alpha}{u} \left(\frac{x}{u}\right)^{-(\alpha+1)} \quad \text{för } x > u$$

beräkna

$$\mu = E[X] = \int_u^\infty x \frac{\alpha}{u} \left(\frac{x}{u}\right)^{-(\alpha+1)} dx = \dots = \frac{\alpha}{\alpha-1} u$$

Denna beräkning förutsätter att $\alpha > 1$, så det som följer är bara giltigt om så är fallet. Inverteras likheten

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha-1} u$$

får vi

$$\alpha = \frac{\mu}{\mu - u}$$

Således är momentestimatet (momentskattningen) av α lika med

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - u} = \frac{5.8}{5.8 - 5.0} = 7.25$$

Momentestimatoren av α är

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu} - u} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - u}$$

B: Trolighetsmetoden

Vi börjar med att konstatera att täthetens värde i punkten x är ett mått på hurpass troligt det är att vi observerar just värdet x . Att vi observerade värdena $x_1, \dots, x_n$ i n oberoende försök blir då så här troligt:

$$\prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{\alpha}{u} \left(\frac{x_1}{u}\right)^{-(\alpha+1)} \dots \frac{\alpha}{u} \left(\frac{x_n}{u}\right)^{-(\alpha+1)}$$

För givna observationer $x_1, \dots, x_n$ är detta en funktion av parametern α som vi kallar trolighetsfunktionen eller bara troligheten och betecknar $L(\alpha)$. Här ser vi att

$$L(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{u}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{u}\right)^{-(\alpha+1)}$$

Trolighetsmetodens skattning av α är

$$\hat{\alpha} = \arg\max_{\alpha} L(\alpha)$$

Lösningen av detta maximeringsproblem är

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i/u)}$$

Trolighetsestimatören är alltså

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i/u)} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i - \ln u}$$

och trolighetsskattningen (trolighetsestimatet) är

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{0.1407} \approx 7.105$$

Således:

Antag att vi har k parametrar $\theta_1, \dots, \theta_k$ i den aktuella fördelningen för X (det som vi observerar eller mäter).

Ex 1: $k = 1$ och $\theta_1 = \lambda$ om $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

Ex 2: $k = 2$ och $\theta_1 = \mu, \theta_2 = \sigma$ om $X \sim N(\mu, \sigma)$

Vår uppgift är att hitta en skattning av $\theta = g(\theta_1, \dots, \theta_k)$.

Momentmetoden bygger på identiteten

$$\theta = h(m_1, m_2, \dots, m_k)$$

där $m_i = E[X^i]$ och momentskattningen av θ är

$$\hat{\theta} = h(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_k)$$

där

$$\hat{m}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j$$

Trolighetsmetoden maximerar trolighetsfunktionen

$$L(\theta_1, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

och trolighetsskattningen av $\theta_1, \dots, \theta_k$ är

$$\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k = \underset{\theta_1, \dots, \theta_k}{\text{argmax}} L(\theta_1, \dots, \theta_k)$$

Trolighetsskattningen av $\theta = g(\theta_1, \dots, \theta_k)$ är $\hat{\theta} = g(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$.

PS Använd i första hand trolighetsmetoden. Om detta ej går, härled din skattning på något annat sätt, t.ex med momentmetoden.

Exempel

Ur $n = 7$ mätningar $x_1, \dots, x_n$ har vi erhållit $\bar{x} = 7.4$, $s^2 = 4.50$ ($s \approx 2.1213$). Vi ska skatta 95%-kvantilen $x_{0.95}$ och har kommit fram till att $X \sim N(\mu, \sigma)$ är en vettig modell. Ur definitionen $F(x_{0.95}) = 0.95$ härleder vi $x_{0.95} = \mu + 1.645\sigma$.

Momentmetoden: Ur $m_1 = \mu$, $m_2 = \mu^2 + \sigma^2$ får vi $\mu = m_1$, $\sigma = \sqrt{m_2 - m_1^2}$. Således gäller $x_{0.95} = m_1 + 1.645\sqrt{m_2 - m_1^2}$. Momentskattningen av 95%-kvantilen är alltså

$$\begin{aligned} \hat{x}_{0.95} &= \hat{m}_1 + 1.645\sqrt{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2} \\ &= 7.4 + 1.645\sqrt{58.617 - 7.4^2} = 10.63 \end{aligned}$$

ty $\hat{m}_1 = (1/n) \sum_i x_i = \bar{x} = 7.4$, $\hat{m}_2 = (1/n) \sum_i x_i^2$
 $= (n-1)s^2/n + \bar{x}^2 = 58.617$.

Trolighetsmetoden: Maximering av troligheten

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_i - \mu)^2/2\sigma^2} = (2\pi)^{-n/2} \sigma^{-n} e^{-(1/2) \sum_i (x_i - \mu)^2/\sigma^2}$$

ger $\hat{\mu} = \bar{x} = 7.4$, $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} s = 1.964$.

Trolighetsskattningen av 95%-kvantilen är alltså

$$\hat{x}_{0.95} = \hat{\mu} + 1.645\hat{\sigma} = 7.4 + 1.645 \cdot 1.964 = 10.63$$

Fast i praktiken använder man gärna skattningen

$$\hat{x}_{0.95} = \bar{x} + 1.645s = 7.4 + 1.645 \cdot 2.1213 = 10.89$$

Theorem 7.3.1

Antag att X och Y är stokastiska variabler och med m.g.f $m_X(t)$ och $m_Y(t)$. Om $m_X(t) = m_Y(t)$ för alla t i en öppen omgivning till $t = 0$, så har X och Y samma fördelning.

Theorem 7.3.2

Låt X_1 och X_2 vara två oberoende stokastiska variabler med m.g.f $m_{X_1}(t)$ och $m_{X_2}(t)$. Låt $Y = X_1 + X_2$. Då ges Y 's m.g.f av

$$m_Y(t) = m_{X_1}(t)m_{X_2}(t)$$

Theorem 7.3.3

Låt X vara en stokastisk variabel med m.g.f $m_X(t)$. Låt $Y = \alpha + \beta X$. Då ges Y 's m.g.f av

$$m_Y(t) = e^{\alpha t} m_X(\beta t)$$

Theorem 7.3.4: Distribution of $\bar{X}$ —normal population

Let $X_1, \dots, X_n$ be a random sample of size n from a normal distribution with mean μ and standard deviation σ . Then $\bar{X}$ is normally distributed with mean μ and standard deviation $\sigma/\sqrt{n}$.

I exemplet med jordproverna (se OH no 2) är $\bar{x} = 233.64$ vårt estimat av väntevärdet μ . Antag att vi bestämt oss för modellen $X \sim N(\mu, \sigma)$. Estimatorn $\bar{X}$ är enl. sats 7.3.4 $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, där $n = 5$ är antalet observationer. Observera att för att teorin ska fungera är det väsentligt att jordproverna är oberoende.

Notera nu att

$$P\left[-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96\right] = 0.95$$

Men olikheten

$$-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96$$

är ekvivalent med

$$\bar{X} - 1.96\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sigma/\sqrt{n}$$

Således gäller

$$P\left[\bar{X} - 1.96\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sigma/\sqrt{n}\right] = 0.95$$

Anta att det är känt att $\sigma = 30$ för den här typen av analyser. Då är $1.96\sigma/\sqrt{n} = 26.30$ och vi får intervallsestimatet

$$(233.64 - 26.30 =) 207.34 \leq \mu \leq 259.94 \quad (= 233.64 + 26.30)$$

Intervallat $[207.34, 259.94]$ är ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden 95%.

Ofta skriver man

$$\mu = 233.64 \pm 26.30$$

Definition 7.4.1: Confidence interval

A $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval for a parameter θ is a random interval $[L_1, L_2]$ such that

$$P[L_1 \leq \theta \leq L_2] = 1 - \alpha$$

regardless of the value of θ .

To construct a $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval for a parameter θ , we shall find a random variable whose expression involves θ and whose probability distribution is known (at least approximately).

Theorem 7.4.1: $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval on μ (σ known)

Let $X_1, \dots, X_n$ be a random sample of size n from a normal distribution with mean μ and standard deviation σ . A $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval on μ when σ is known, is given by

$$\mu = \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$$

where the quantile $z_{\alpha/2}$ is determined by the requirement

$$P[Z > z_{\alpha/2}] = \alpha/2$$

for $Z \sim N(0, 1)$.

Ibland vill man ha ett ensidigt konfidenstervall av typen $\theta < L$.

I normalfördelningsfallet utgår man då ifrån

$$P\left[-z_\alpha < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

och härleder

$$P[\mu < \bar{X} + z_\alpha \sigma / \sqrt{n}] = 1 - \alpha$$

I jordprovsexemplet (se OH no 2 och 12) får vi (med $\sigma = 30$) om $\alpha = 0.05$ att $z_\alpha = 1.645$ vilket ger $z_\alpha \sigma / \sqrt{n} = 22.07$ och intervallsestimatet med konfidens 95% blir

$$\mu \leq 255.71 \quad (= 233.64 + 22.07)$$

J.f.r med

$$\mu = 233.64 \pm 26.30 \quad \Leftrightarrow \quad 207.34 \leq \mu \leq 259.94$$

Theorem 7.4.2: Central Limit Theorem

Let $X_1, \dots, X_n$ be a random sample of size n from a distribution with mean μ and standard deviation σ . Then for large n , $\bar{X}$ is approximately normal with mean μ and standard deviation $\sigma/\sqrt{n}$. Hence for large n , the standardized random variable

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

is approximately standard normal.

Men, då n är stort, gäller även att $s \approx \sigma$ och följaktligen har vi då också att

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \approx N(0, 1)$$

Denna approximation är naturligtvis sämre än den i sats 7.4.2.

Normalapproximation av $\text{Bin}(n, p)$

Här är $X_1, \dots, X_n$ ett stickprov på $\text{Ber}(p)$.

Då är $\mu = p$ och $\sigma^2 = p(1 - p)$.

Enl c.g.s är $\bar{X}$ approximativt $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ då n är stort.

Men då är också $S = \sum_{i=1}^n X_i$ approximativt $N(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Notera också att $S \sim \text{Bin}(n, p)$.

Således gäller att $\text{Bin}(n, p) \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Hur stort behöver n vara för att approximationen ska fungera?

Milton & Arnold, sida 121 (avs 4.6): "For most practical purposes the approximation is acceptable for values of n and p such that either $p \leq 0.5$ and $np > 5$ or $p > 0.5$ and $n(1 - p) > 5$."

M.a.o är $n \min(p, 1 - p) > 5$ en lämplig regel.