Modell

Vi har två oberoende stickprov.

Det ena består av n_1 observationer från $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1)$-fördelningen.
Dess medelvärde och varians är $\bar{X}_1$ och S_1^2.

Det andra av n_2 observationer från $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2)$-fördelningen.
Dess medelvärde och varians är $\bar{X}_2$ och S_2^2.

Sats 10.1.1

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2})$$

Om $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, så fås

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}\right)$$

Definition 10.2.1: F-fördelningen

Låt för $i = 1, 2$, X_i^2 vara oberoende $\chi^2(\gamma_i)$-variabler. Kvoten

$$F_{\gamma_1,\gamma_2} = \frac{X_1^2/\gamma_1}{X_2^2/\gamma_2}$$

är då $F(\gamma_1, \gamma_2)$-fördelad. Kvantilen $f_{\alpha,\gamma_1,\gamma_2}$ definieras av att

$$P(F_{\gamma_1,\gamma_2} > f_{\alpha,\gamma_1,\gamma_2}) = \alpha$$

Ett symmetriargument (i.e, $F_{\gamma_1,\gamma_2} = 1/F_{\gamma_2,\gamma_1}$) ger att

$$\frac{1}{f_{\alpha,\gamma_1,\gamma_2}} = f_{1-\alpha,\gamma_2,\gamma_1}$$

Sats 10.2.1

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Test av $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ mot $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$ eller $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Under $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ är teststatistikan $S_1^2/S_2^2 \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

Exempel 10.2.2

Material A	Material B
$n_A = 25$	$n_B = 16$
$\bar{x}_A = 330$	$\bar{x}_B = 370$
$s_A^2 = 100$	$s_B^2 = 400$

Man önskar testa $H_0 : \sigma_A = \sigma_B$ mot $H_1 : \sigma_A \neq \sigma_B$

Teststatistikans värde är $s_B^2/s_A^2 = 4$ (15 resp 24 frihetsgrader)

Ur tabell IX, sida 704-714, fås $P(F_{15,24} > 2.108) = 0.05$

Vi kan alltså förkasta $H_0 : \sigma_A = \sigma_B$ på nivån 10%

Definition 10.3.1: Pooled variance

Då $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ definierar vi

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Sats 10.3.1

The bounds for a $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval on $\mu_1 - \mu_2$ are

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2,n_1+n_2-2} s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$$

provided $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

T test statistic

1. Equal variances. The statistic

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

under $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

2. Non-equal variances. The statistic

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \overset{\text{ap}}{\sim} t(\gamma)$$

under $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, where γ is called Smith-Satterthwaite Degrees of Freedom and is the integer part of

$$\frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Exempel 10.3.3

Material A	Material B
$n_1 = 10$	$n_2 = 16$
$\bar{x}_1 = 18\,900$	$\bar{x}_2 = 17\,500$
$s_1^2 = 1600$	$s_2^2 = 2500$

Man vill visa att $\mu_1 > \mu_2$ och antager därför att $\mu_1 = \mu_2$

Börja med $s_2^2/s_1^2 = 2500/1600 = 1.5625$ (15 resp 9 frihetsgrader)

J.f.r med $P(F_{15,9} > 2.340) = 0.10$

Det finns alltså ingen anledning att tro något annat än att $\sigma_1 = \sigma_2$

Vi beräknar därför $s_p^2 = \dfrac{9 \cdot 1600 + 15 \cdot 2500}{9 + 15} = 2162.5 = 46.50^2$

Teststatistikans utfall är $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p\sqrt{1/n_1 + /n_2}} = 74.68$

Antalet frihetsgrader är $\gamma = 9 + 16 = 24$

Ur tabell VI (sida 699-700) fås $t_{0.01}(24) = 2.492$

P-värdet är alltså < 0.01

Slutsats: $\mu_1 = \mu_2$ förkastas till förmån för $\mu_1 > \mu_2$ på nivån 1%

Exempel 10.4.1 (forts av ex 10.2.2)

Material A	Material B
$n_A = 25$	$n_B = 16$
$\bar{x}_A = 330$	$\bar{x}_B = 370$
$s_A^2 = 100$	$s_B^2 = 400$

Man vill visa att $\mu_A > \mu_B$ och antager därför att $\mu_A = \mu_B$

Det finns skäl att misstänka att $\sigma_A \neq \sigma_B$ (j.f.r ex 10.2.2)

Teststatistikan utfall är $\dfrac{\bar{x}_A - \bar{x}_B - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{s_A^2/n_A + s_B^2/n_B}} = 1.857$

Antal frihetsgrader fås ur $\dfrac{\left(s_A^2/n_A + s_B^2/n_B\right)^2}{\dfrac{\left(s_A^2/n_A\right)^2}{n_A - 1} + \dfrac{\left(s_B^2/n_B\right)^2}{n_B - 1}} = 19.86$

Alltså, $\gamma = 19$

Ur tabell fås $t_{0.05}(19) = 1.729$, $t_{0.025}(19) = 2.093$

P-värdet är alltså < 0.05, men ej < 0.025

Slutsats: $\mu_A = \mu_B$ förkastas till förmån för $\mu_A > \mu_B$ på nivån 5%

Avsnitt 10.5: Parade data

Modell: X_i, Y_i för $i = 1, \ldots, n$ är oberoende N-fördelade och

$$E[X - Y] = \mu_d \text{ och } \operatorname{Var}[X - Y] = \sigma_d^2$$

Beteckna med $\bar{X}_d$ och S_d^2 medelvärdet och variansen av differenserna $X_i - Y_i$, $i = 1, \ldots, n$

Utsagan

$$\mu_d = \bar{x}_d \pm t_{\alpha/2, n-1} s_d/\sqrt{n}$$

har konfidensen $1 - \alpha$

Under $H_0 : \mu_d = 0$ är statistikan

$$\frac{\bar{X}_d}{S_d/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Exempel 10.5.1, 10.5.2

Program nr	Algoritm gamla x	Algoritm nya y	Differens $x - y$
1	8.05	0.71	7.34
2	24.74	0.74	24.00
3	28.33	0.74	27.59
⋮	⋮	⋮	⋮
10	8.54	0.72	7.82

Vi får $\bar{x}_d = 14.409$ och $s_d = 8.653$

Vi visar att $\mu_d > 0$ genom att antaga att $\mu_d = 0$ och jämföra utfallet av teststatistikan

$$\frac{\bar{x}_d}{s_d/\sqrt{n}} = 5.266$$

med $t_{0.01,9} = 2.82$ (P-värdet är alltså $< 1\%$)