

TMS051 Matematisk statistik och simuleringsteknik, Z

Tentamen 30 mars 2005 f V

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa utan lagrad information om kursen, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

Examinator är Tommy Norberg, ankn 3528 eller 0730 794209. Tommy är just nu i Asien och återkommer till Sverige den 10:e april.

Jour är

Maximalt antal tentamenspoäng är 30, av dessa krävs 12 för godkänt betyg och 18 resp 24 för 4:a och 5:a. Lösningar går att ladda ner från kurshemsidan. Rättningsprotokoll anslås i första våningen i Matematisk centrum, Eklandagatan 86. Granskning av tentan kan under terminstid göras i mottagningsrummet på entréplanet (våning 2) i Matematisk centrum må-fr 12³⁰–13.

Svar skall motiveras om ej annat sägs i uppgiften.

Uppgifter

1. Antag att du i din hand har en välblandad standard kortlek om 52 kort, varav 13 med "färgen" spader. Du lägger först ett kort på bordet och sedan ett till. Båda korten läggs med baksidan upp så att man inte kan se deras färg.

- (a) Hur stor är sannolikheten att det första kortet har färgen spader? (1 p)
- (b) Hur stor är sannolikheten att det andra kortet har färgen spader? (1 p)
- (c) Är händelserna "första kortets färg är spader" och "andra kortets färg är spader" oberoende? (2 p)

Ingen motivering krävs på deluppgifterna (a) och (b). Däremot är det viktigt att deluppgift (c) motiveras korrekt.

2. Denna uppgift och nästa handlar om en "binary symmetric communication channel". En sådan sänder en bit (som kan anta värdena $i = 0, 1$) åt gången och definieras av att

$$P(M_1|S_0) = P(M_0|S_1) = p$$

Här betecknar M_i händelsen att biten i mottages och S_i händelsen att biten i sänds. Beräkna $P(S_1|M_1)$ om $P(S_1) = 0.5$. (3 p)

3. Visa, för den binära kommunikationskanalen som beskrivs i ovanstående uppgift, att $P(S_1|M_1) > P(S_1) \Leftrightarrow 2p < 1$. (4 p)

4. (a) Kan funktionen $f(x)$, given av att

$$\frac{f(x)}{c} = \begin{cases} \frac{x-0.2}{0.15} & \text{då } 0.2 \leq x \leq 0.35 \\ \frac{0.7-x}{0.35} & \text{då } 0.35 \leq x \leq 0.7 \end{cases}$$

för något c (och i så fall vilket) fungera som täthet för någon stokastisk variabel. (Svaret är, som du förstår av nästa fråga, ja, men du måste motivera det korrekt.) (2 p)

(b) Låt den stokastiska variabeln X ha denna täthet. Beräkna $P(X \geq 0.35)$. (2 p)

5. Låt X, Y vara bivariat normalfördelade med $E[X] = 2$, $E[Y] = 1$, $\text{Var}[X] = 4$, $\text{Var}[Y] = 1$ och $\rho = 0.5$. Sätt $U = X - 2Y$. Vilken fördelning har U ? (4 p)

6. Man gjorde 7 mätningar av en exponentialfördelad tid. Därvid erhöles:

1.226 0.765 3.090 2.457 0.667 0.335 3.340

(tidsenhet: timmar). Beräkna trolighetsskattningen av den 75:e percentilen. Ge svaret med 2 korrekta decimaler. (4 p)

7. I en simuleringsstudie gjordes $n = 10\,000$ oberoende simuleringar av en slumpmässig storhet x med okänt väntevärde μ . Därvid erhöles $\sum x = 27\,400$ och $\sum x^2 = 85\,075$. Hur stort är "felet" i skattningen $\hat{\mu} = 2.74$ av μ ? Räkna ut det med 95% konfidens. (3 p)

8. Efter reparation av ett mätinstrument skulle det kalibreras m.a.p väntevärdesriktighet medelst jämförelse med ett väntevärdesriktigt instrument. Man gjorde $n_1 = 9$ mätningar och erhöile medelvärde $\bar{x}_1 = 3.57$ samt variansen $s_1^2 = 0.538$ med det just reparerade instrumentet och i ytterligare $n_2 = 6$ mätningar av samma storhet med det väntevärdesriktiga instrumentet erhöile $\bar{x}_2 = 4.47$ och $s_2^2 = 0.621$.

(a) Finns det anledning att misstänka att de båda instrumenten hade olika standardavvikelser i denna mätning? (2 p)

(b) Finns det anledning att misstänka att det just reparerade instrumentet ej ger väntevärdesriktiga mätresultat? (2 p)

Oberoende normalfördelade data kan förutsättas. I deluppgift (a) är det lämpligt med konfidensen 90% och i deluppgift (b) 95%.

Lycka till!

1. Låt A_i , för $i = 1, 2$, beteckna händelsen att kort i är spader.

(a) $P(A_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(b) $P(A_2) = \frac{1}{4}$ (för alla korten i leken gäller ju att sannolikheten att det är spader är $13/52 = 1/4$ om man inte vet något om de övriga)

(c) Nej, ty $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{13}{52} \frac{12}{51} \neq \frac{1}{4} \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$

2. Bayes formel ger:

$$P(S_1|M_1) = \frac{P(S_1)P(M_1|S_1)}{P(S_1)P(M_1|S_1) + P(S_0)P(M_1|S_0)} = \frac{1-p}{1-p+p} = 1-p$$

3. $P(S_1|M_1) > P(S_1) \Leftrightarrow P(S_1 \cap M_1) > P(S_1)P(M_1) \Leftrightarrow P(M_1|S_1) > P(M_1) = \frac{P(S_1)P(M_1|S_1) + P(S_0)P(M_1|S_0)}{P(S_1) + P(S_0)} \Leftrightarrow P(M_1|S_1) > \frac{P(S_0)P(M_1|S_0)}{P(S_1) + P(S_0)} \Leftrightarrow 1-p > p \Leftrightarrow 2p < 1$, qed

4. (a) $f(x) \geq 0$ och integrabel, så den måste vara en täthet för något positivt c . Vi ser att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{c} dx = \int_{0.2}^{0.7} \frac{f(x)}{c} dx = \frac{0.5 \cdot 1}{2} = 0.25 \Rightarrow c = 4$ ($\frac{f(x)}{c}$ är ju en triangel med basen $0.15 + 0.35 = 0.5$ och höjden 1)

(b) Den sökta sannolikheten är $1 - \int_{-\infty}^{0.35} f(x) dx = 1 - \int_{0.2}^{0.35} f(x) dx = 1 - \frac{0.15 \cdot 4}{2} = 1 - 0.3 = 0.7$ (restriktionen av $f(x)$ till intervallet $[0.2, 0.35]$ är en triangel med basen 0.15 och höjden c)

5. Linjärkombinationer av bivariat normalfördelade variabler är normalfördelade, så U är $N(\mu, \sigma)$. Vi får vidare att $\mu = E[U] = E[X] - 2E[Y] = 2 - 2 \cdot 1 = 0$, samt $\sigma^2 = \text{Var}[U] = \text{Kov}[U, U] = \text{Kov}[X - 2Y, X - 2Y] = \text{Kov}[X, X] - 2\text{Kov}[X, Y] - 2\text{Kov}[Y, X] + 4\text{Kov}[Y, Y] = \text{Var}[X] + 4\text{Var}[Y] - 4\text{Kov}[X, Y] = \text{Var}[X] + 4\text{Var}[Y] - 4\rho\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]} = 4 + 4 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot 1} = 4$. Således är $U \sim N(0, 2)$

6. Modellen är att data är $\exp(\lambda)$ -fördelade. Då är tätheten

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{för } x \geq 0$$

Den 75:e percentilen $x_{0.75}$ uppfyller

$$0.75 = \int_0^{x_{0.75}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x_{0.75}} \Rightarrow x_{0.75} = -\frac{\ln 0.25}{\lambda} = \frac{\ln 4}{\lambda}$$

Således gäller att trolighetsskattningen av $x_{0.75}$ ges av

$$\hat{x}_{0.75} = \frac{\ln 4}{\hat{\lambda}}$$

där $\hat{\lambda}$ är trolighetsskattningen av λ . Denna fås medelst maximering av trolighetsfunktionen

$$L(\lambda) = \prod_i f(x_i) = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \dots \cdot \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_i x_i}$$

Här betecknar $x_1, \dots, x_n$ de uppmätta tiderna. Tricket, som man ska känna till, i den här typen av maximi-problem, är att man istället ska maximera logaritmen. Därför bildar vi

$$\mathcal{L}(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_i x_i$$

Derivera, sätt derivatan till noll och lös ut λ :

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_i x_i = 0 \Rightarrow \frac{n}{\lambda} = \sum_i x_i \Rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum_i x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Loggade trolighetsfunktioner av denna typ är konkava, så detta måste vara en maximipunkt. (Inget poängavdrag om argumentation för att detta är en maximipunkt saknas.) Således gäller att $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}} \Rightarrow \hat{x}_{0.75} = \bar{x} \ln 4$. Återstår att räkna ut att

$$\bar{x} = \frac{11.88}{7} = 1.6971 \dots \Rightarrow \hat{x}_{0.75} = 2.35$$

7. Börja med att beräkna $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x = 2.74$ och $(n-1)s^2 = \sum x^2 - \frac{1}{n} (\sum x)^2 = 9999 \Rightarrow s^2 = 1 \Rightarrow s = 1$. Konfidensintervallet blir $\mu = \bar{x} \pm 1.96s/\sqrt{n} \approx \bar{x} \pm 2s/\sqrt{n} = 2.74 \pm 0.02$. Den som svarar $\pm 1.96 \cdot 10^{-2} = \pm 0.0196$ får naturligtvis också rätt

8. (a) Under nollhypotesen $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ är kvoten $\frac{s_1^2/n_1}{s_2^2/n_2}$, vars evaluerade värde är $1.846840 \dots$, $F(df_1, df_2)$ -fördelad, där $df_i = n_i - 1 = 8$ resp 5 . I tabellen i formelsamlingen ser vi att det för en $F(5, 8)$ -fördelad variabel f gäller att $P(f \leq 0.208) = P(f \geq 3.688) = 0.05$. Notera nu att $0.208 \leq 1/1.846840 \dots = 0.541 \leq 3.688$ ($\frac{s_2^2/n_2}{s_1^2/n_1}$ är ju $F(5, 8)$ -fördelad). Data tyder alltså inte alls på att antagandet $\sigma_1 = \sigma_2$ är oriktigt
- (b) Eftersom vi inte har någon anledning att misstänka att $\sigma_1 \neq \sigma_2$, "poolar" vi ihop de två variansskattningarna till en enligt

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 0.5699 \dots \Rightarrow s = 0.755$$

Totala antalet frihetsgrader i denna skattning är $n_1 + n_2 - 2 = 13$ och en titt i motsvarande t -tabell ger oss 0.975-kvantilen $t_{0.025} = 2.160$. Således gäller att konfidensintervallet

$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{0.025} s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = -0.90 \pm 0.86$$

har konfidensen 95%. Då origo ej ingår i detta intervall drar vi slutsatsen att påståendet $\mu_1 \neq \mu_2$ har minst konfidensen 95%. Risken att det är fel är alltså högst 5%. Ett annat sätt att lösa denna uppgift är att testa $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ mot alternativet $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ på nivån 5%. Teststatistikan $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ är $t(13)$ -fördelad och ur

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = 2.262 \geq 2.160$$

ser vi att testet förkastar H_0 . Det finns alltså anledning att misstänka att det just reparerade instrumentet ej ger väntevärdesriktiga resultat.

TMS051 Matematisk statistik och simuleringsteknik, Z

Tentamen 11 december 2004 e V

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa utan lagrad information om kursen, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

Examinator är Tommy Norberg, ankn 3528 eller 0730 794209.

Jour är Oskar Sandberg, ankn 5366. Oskar besöker skrivningssalen efter kl 15 och vid behov senare.

Maximalt antal tentamenspoäng är 30, av dessa krävs 12 för godkänt betyg och 18 resp 24 för 4:a och 5:a. Lösningar går att ladda ner från kurshemsidan. Rättningsprotokoll anslås i första våningen i Matematisk centrum, Eklandagatan 86. Granskning av tentan kan under terminstid göras i mottagningsrummet på entréplanet (våning 2) i Matematisk centrum må-fr 12³⁰–13.

Svar skall motiveras om ej annat sägs i uppgiften.

Fyll i enkäten när du är klar med uppgifterna nedan. Ju fler som svarar, desto bättre kan vi göra kursen!

Uppgifter

1. Hur stor är sannolikheten att få en s.k Black Jack? Vi har en välblandad kortlek om 52 kort, bestående av 4 st ess, 12 st klädda kort (4 st kungar, 4 st damer och 4 st knektar) samt ytterligare 36 kort (4 st 10:or, 4 st 9:or, ..., 4 st 2:or). En giv består av två kort dragna från toppen av kortleken och att få en Black Jack innebär att man får ett ess och antingen ett klätt kort eller en 10:a på given. Ordningen saknar betydelse. (3 p)
2. Överföring av data från rymdsonder som färdats till andra planeter i solsystemet sker genom att man sänder långa sekvenser av s.k bitar där en bit är antingen 0 eller 1. Sändaren i satelliten är av naturliga skäl svag, vilket ger ett lågt signal/brus-förhållande på mottagarsidan. Detta medför i sin tur att risken för felaktigt uppfattade data är stor. Antag att det vid mottagandet av en bit gäller att risken att den felaktigt tolkas som 1:a är ca 10.0% och att den felaktigt tolkas som 0:a är ca 7.5% (detta kan man ta reda på genom att satelliten beordras sända en given testsekvens). Om det är så att bilder i snitt innehåller 55% 1:or och 45% 0:or, hur stor är då den betingade sannolikheten att en 1:a sändes givet att en 1:a mottogs? (3 p)
3. Betrakta funktionen $f(x, y) = \frac{c}{xy}$ definierad för $x, y \geq 1$. Är detta en täthet för en stokastisk vektor (X, Y) för något $c > 0$ och, i så fall, för vilket c ? (3 p)
4. Visa att
 - (a) $E[\bar{X}] = \mu$ (1 p)
 - (b) $\text{Var}[\bar{X}] = \sigma^2/n$ (2 p)
 - (c) $E[s^2] = \sigma^2$ (2 p)

Här är $\bar{X}$ och s^2 medelvärde respektive varians i ett stickprov om n oberoende observationer av en stokastisk variabel X med väntevärde μ och varians σ^2 . En av de tre visade likheterna gäller även då observationerna ej är oberoende. Vilken?

5. I syfte att verifiera kvalitet i tillverkning av resistorer mätte man resistansen i fem st slumpvis utvalda produkter. I kvalitetskravet ingår att standardavvikelsen ej får vara större än 6.00. Medelvärdet av de fem resistanserna uppmättes till 34.52 ohm och variansen till $7.29 = 2.7^2$. Undersök med följande två metoder om man lyckades med att verifiera kvalitetskravet på standardavvikelsen:

(a) Genom att göra ett uppgåt begränsat konfidensintervall för standardavvikelsen med konfidensgrad ca 0.95. (2 p)

(b) Genom att testa $H_0 : \sigma \geq 6.00$ mot $H_1 : \sigma < 6.00$ på nivån 0.05. (2 p)

Ange i båda fallen om man lyckades verifiera kvalitetskravet eller ej. Det är tillåtet att anta att mätmetoden ger normalfördelade observationer.

6. I simuleringsuppgift 2 ska man i två deluppgifter simulera data $n = 100$ gånger och utföra ett test av $H_0 : \rho = 0$ mot $H_1 : \rho > 0$. Syftet var att skatta sannolikheten p att förkasta H_0 och indikera att denna är en växande funktion av det verkliga värdet av korrelationen ρ . I fall (b), då $\rho = 0.85$, erhöll jag $f_b = 73$ förkastanden och i fall (d), då $\rho = 0.4$, erhöll jag $f_d = 4$ förkastanden. Kalla motsvarande sannolikheter för p_b respektive p_d .

(a) Punkt- och intervallskatta (med konfidensen ca 0.95) p_b och p_d . (2 p)

(b) Testa $H_0 : p_b \leq p_d$ mot $H_1 : p_b > p_d$ på nivån 0.01. (2 p)

7. Textilföretaget A förlorar marknadsandelar p.g.a kvalitetsproblem och höga priser. Ledningen funderar allvarligt på att investera i ny teknik. Vid provtillverkning med den nya tekniken gjordes $n_N = 12$ oberoende provtygbitar. Efter inspektion fick varje prov ett kvalitetstal. Medelvärdet av dessa blev $\bar{x}_N = 8.5$ och standardavvikelsen blev $s_N = 3.18$. För jämförelse tillverkades $n_G = 24$ oberoende prover med den nuvarande processen. Därvid erhöles $\bar{x}_G = 5.4$ och $s_G = 5.21$. Ju högre kvalitetstal, desto bättre är kvaliteten. Man vill också att standardavvikelsen i processen ska vara liten. Jämför värdena så som vi gjort i kursen och besvara (i den mån det går och på ett statistiskt korrekt sätt) följande två frågor:

(a) Är $\sigma_N < \sigma_G$? (2 p)

(b) Är $\mu_N > \mu_G$? (2 p)

8. I syfte att undersöka huruvida två materialegenskaper, vi kan kalla dem x och y , är korrelerade eller ej gjordes (x, y) -mätningar på $n = 25$ slumpmässigt utvalda prover. Härvid erhöles $\sum x = 1.23$, $\sum y = 0.75$, $\sum x^2 = 3.33$, $\sum y^2 = 2.21$ och $\sum xy = 1.43$ och. Antag normalfördelade mätningar. Skatta korrelationen och undersök om man med risken att ha fel ≤ 0.01 kan påstå att denna $\neq 0$. (4 p)

1. Vi ska dra två kort ur kortleken. Ordningen spelar ingen roll. Multiplikationsprincipen ger att den sökta sannolikheten är $\frac{\binom{4}{1}\binom{16}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{4}{52} \cdot \frac{16}{51} \cdot 2 = \frac{32}{663} \approx 0.0483$. Alternativt kan man börja med att beräkna sannolikheten att man först får ett ess och sedan ett klätt kort, som är $\frac{4}{52} \cdot \frac{16}{51} = \frac{16}{663} \approx 0.0241$ och lägga till den lika stora sannolikheten att man först får ett klätt kort och sedan ett ess.

2. Låt M resp S beteckna det som togs emot och det som sändes. Vi vet att $P(S) = 0.55$, $P(M = 1 | S = 0) = 0.100$ och $P(M = 0 | S = 1) = 0.075$. Den sökta sannolikheten $P(S = 1 | M = 1)$ fås ur Bayes sats så här:

$$\begin{aligned} P(S = 1 | M = 1) &= \frac{P(S = 1)P(M = 1 | S = 1)}{P(S = 1)P(M = 1 | S = 1) + P(S = 0)P(M = 1 | S = 0)} \\ &= \frac{0.55 \cdot 0.925}{0.55 \cdot 0.925 + 0.45 \cdot 0.100} \approx 0.919 \end{aligned}$$

3. Nej, funktionen kan inte bli en täthet för något $c > 0$ eftersom $\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{xy} dy dx = \infty$.

4. (a) $E[\bar{X}] = \sum_i E[X_i]/n = n\mu/n = \mu$ (Här används bara att väntevärdet är en linjär operator. Denna likhet gäller alltså även då observationerna är beroende. Men observera att alla måste ha väntevärdet μ och variansen σ^2 .)

- (b) $\text{Var}[\bar{X}] = \sum_i \text{Var}[X_i]/n^2 = n\sigma^2/n^2 = \sigma^2/n$ (Den första likheten följer av oberoendet.)

- (c) $E[(n-1)s^2] = E[S_{xx}] = E[\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2] = \sum_i E[x_i^2] - nE[\bar{x}^2] = n(\mu^2 + \sigma^2) - n(\mu^2 + \sigma^2/n) = (n-1)\sigma^2$ (Den tredje likheten följer av linjäriteten och den fjärde av oberoendet.)

5. I formelsamlingen ses att $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$. Här är antalet frihetsgrader $n-1 = 4$ och ur tabell fås att kvantilen $\chi_{0.05,4}^2 = 0.711$.

- (a) Händelsen $(n-1)s^2/\sigma^2 \geq \chi_{1-\alpha,n-1}^2$ har sannolikheten $1-\alpha$. Således gäller att uttrycket $\sigma^2 \leq (n-1)s^2/\chi_{1-\alpha,n-1}^2 \Leftrightarrow \sigma \leq \sqrt{(n-1)/\chi_{1-\alpha,n-1}^2} s$ efter insättning av kända och observerade värden definierar intervall av den sökta typen för σ^2 respektive σ med konfidensen $1-\alpha$. Vi får att $\sigma \leq \sqrt{4/0.711} \cdot 2.7 = 6.404$. Hade gränsen varit ≤ 6.00 , så hade vi kunnat hävda att kvalitetskravet är uppfyllt med ca 95% konfidens (säkerhet). Nu kan vi inte det.

- (b) Nivå- α -testet förkastar då $(n-1)s^2/6.00^2 \leq \chi_{1-\alpha,n-1}^2$, d.v.s då $s^2 \leq 36\chi_{1-\alpha,n-1}^2/(n-1) = 6.399$

Då detta ej är uppfyllt, kan vi inte förkasta på nivån 5%. Inte heller nu kan vi alltså hävda att kvalitetskravet är uppfyllt med den önskade konfidensen.

Obs att båda metoderna är ekvivalenta. Det är alltså ingen tillfällighet att de gav samma slutsats.

6. (a) Med formeln $p = \hat{p} \pm 1.96\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ där $\hat{p} = f/n$ fås $p_b = 0.73 \pm 0.09$ och $p_d = 0.04 \pm 0.04$.

(b) Teststatistika är

$$Z = \frac{\hat{p}_b - \hat{p}_d}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_b + 1/n_d)}} \stackrel{\text{ap}}{\sim} N(0, 1)$$

där $\hat{p} = (f_b + f_d)/(n_b + n_d)$, och H_0 kan förkastas på nivån 0.01 då observerat värde z av Z är $\geq z_{0.01} = 2.326$. Observerade värden är $\hat{p} = 77/200 = 0.385$ och $z = 10.03 > 2.326$. Vi kan således förkasta H_0 på nivån 0.01.

7. (a) Vi testar $H_0 : \sigma_N = \sigma_G$ mot $H_1 : \sigma_N < \sigma_G$. Teststatistika är $s_G^2/s_N^2 \sim F(n_G - 1, n_N - 1)$. Observerat värde $s_G^2/s_N^2 = 5.21^2/3.18^2 = 2.684$ jämförs med kvantiler i formelsamlingens F -tabell ($n_G - 1 = 23$ resp $n_N - 1 = 11$ frihetsgrader). Där ser vi att $f_{0.05, 23, 11} = 2.617$ och $f_{0.025, 23, 11} = 3.184$. Således gäller att (det ensidiga) P -värdet är < 0.05 och > 0.025 . På 5%-nivån kan vi alltså förkasta $H_0 : \sigma_N = \sigma_G$ till förmån för $H_1 : \sigma_N < \sigma_G$. Vi kan därför hävda att $\sigma_N < \sigma_G$ med en felrisk $\leq 5\%$.

- (b) Eftersom det är troligt att varianserna är olika, beräknar vi Smith-Satterthwaites frihetsgradtal γ , som är heltalsdelen av

$$\frac{[s_N^2/n_N + s_G^2/n_G]^2}{\frac{(s_N^2/n_N)^2}{n_N-1} + \frac{(s_G^2/n_G)^2}{n_G-1}} \approx 32.4$$

Teststatistika vid test av $H_0 : \mu_N = \mu_G$ är

$$T = \frac{\bar{X}_N - \bar{X}_G}{\sqrt{s_N^2/n_N + s_G^2/n_G}} \stackrel{\text{ap}}{\sim} t(\gamma)$$

Observerat värde av T är $t = 2.207$. Detta ska jämföras med kvantilerna $t_{0.025, 32} = 2.037 < t$ och $t_{0.01, 32} = 2.447 > t$. Vi ser att P -värdet är < 0.025 och > 0.01 (ensidigt test). Vi kan därför hävda att $\mu_N > \mu_G$ med en felrisk $\leq 5\%$.

Notera att när vi samtidigt påstår att $\sigma_N < \sigma_G$ med en felrisk som är $\leq 5\%$ och att $\mu_N > \mu_G$ med en felrisk $\leq 5\%$, så följer att den totala risken för fel (fel begås om ett eller båda två påståendena är osanna) är $\leq 10\%$. Detta följer ifrån Booles olikhet, som säger att $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

8. Vi får att $\bar{x} = 0.0492$ och $\bar{y} = 0.03$ samt att $S_{xx} = \sum x^2 - n\bar{x}^2 = 3.269484$, $S_{yy} = \sum y^2 - n\bar{y}^2 = 2.1875$ och $S_{xy} = \sum xy - n\bar{x}\bar{y} = 1.3931$. Härur fås att $\hat{\rho} = S_{xy}/\sqrt{S_{xx}S_{yy}} \approx 0.521$ (ρ betecknar korrelationen). Teststatistika vid test av $H_0 : \rho = 0$ är

$$T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}} \sim t(n-2)$$

Observerat värde av teststatistikan är $t = 2.927$. Detta ska jämföras med kvantiler i $t(23)$ -fördelningen. En titt i formelsamlingens t -tabell ger att $t > t_{0.005, 23} = 2.807$. P -värdet blir följaktligen $< 2 \cdot 0.005 = 0.01$ (testet är ju två-sidigt). Vi kan alltså hävda att $\rho \neq 0$ med konfidensen minst ca 99% (vilket är samma sak som att säga att risken att vi har fel när vi hävdar att $\rho \neq 0$ ej är större än ca 1%).