

Slumptal genereras i datorer

De ska efterlikna oberoende observationer från $U(0,1)$

Här är resultatet av Matlab-kommandot **rand(1,5)**

0.6227 0.9203 0.2867 0.2944 0.3899

Detta är en simulering av 5 oberoende observationer av $U(0,1)$

Här är resultatet av **floor(2*rand(1,15))**

1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1

Detta är en simulering av 15 oberoende slantsdinglingar med ett symmetriskt mynt

Här är resultatet av **ceil(6*rand(1,10))**

1 3 4 4 6 4 5 3 1 3

Detta är en simulering av 10 oberoende kast med en symmetrisk tärning

Algorithm för simulering av ett kast med en symmetrisk tärning

1. Generera ett slumptal u

2. Låt

$$x = 1 \quad \text{om} \quad u \leq 1/6$$

$$x = 2 \quad \text{om} \quad 1/6 < u \leq 2/6$$

$$x = 3 \quad \text{om} \quad 2/6 < u \leq 3/6$$

$$x = 4 \quad \text{om} \quad 3/6 < u \leq 4/6$$

$$x = 5 \quad \text{om} \quad 4/6 < u \leq 5/6$$

$$x = 6 \quad \text{om} \quad 5/6 < u$$

Låt x vara resultatet av ett försök och antag att motsv slumpvariabel X har sannolikhetsfördelningen

x	1	2	3
$p(x)$	0.3	0.5	0.2

Algorithm för generering av en observation x av X

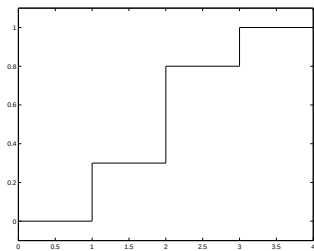
1. Generera ett slumptal u

2. Låt

$$x = 1 \quad \text{om} \quad u \leq 0.3$$

$$x = 2 \quad \text{om} \quad 0.3 < u \leq 0.8$$

$$x = 3 \quad \text{om} \quad 0.8 < u$$



Simulering av $\text{bin}(4, 0.2)$

Sannolikhetsfördelning

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016

Algorithm

1. Generera ett slumptal u

2. Låt

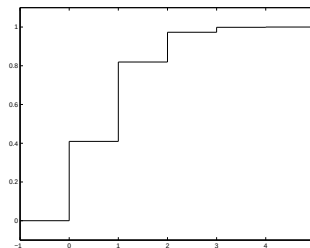
$$x = 0 \quad \text{om} \quad u \leq 0.4096$$

$$x = 1 \quad \text{om} \quad 0.4096 < u \leq 0.8192$$

$$x = 2 \quad \text{om} \quad 0.8192 < u \leq 0.9728$$

$$x = 3 \quad \text{om} \quad 0.9728 < u \leq 0.9984$$

$$x = 4 \quad \text{om} \quad 0.9984 < u$$



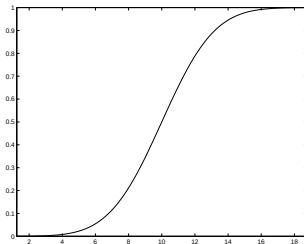
Simulering av $N(10, 2.5)$

Algorithm

1. Generera ett slumpstal u
2. Lös x ur ekvationen

$$u = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

där $f(y)$ är $N(10, 2.5)$ -tätheten

Simulering av en kontinuerlig slumpvariabel med täthet $f(x)$

$$\text{Låt } F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

Om möjligt, bilda F 's invers F^{-1} .

Skriv därvid om uttrycket $u = F(x)$ på formen $x = F^{-1}(u)$

Algorithm

1. Generera ett slumpstal u
2. Bilda $x = F^{-1}(u)$. Om detta ej går, lös ut x ur $u = F(x)$ med numeriska ekvationslösningsmetoder

Bevis

$U = F(X)$ är $U(0, 1)$ -fördelad, ty

$$\begin{aligned} P(U \leq u) &= P(F(X) \leq u) \\ &= P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u \end{aligned}$$

Men $U = F(X) \Leftrightarrow X = F^{-1}(U)$ V.S.V

Att $F^{-1}(U)$ har samma fördelning som X , kallas ibland för simulernans huvudsats.

Simulering av $\exp(\lambda)$

Tätheten är $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ för $x > 0$

Således är fördelningsfunktionen

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda x}$$

Vi löser x ur $u = F(x)$ och får

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$$

Således är

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$$

en simulerad observation av $\exp(\lambda)$ om u är ett slumpstal.

Men om u är ett slumpstal, så är även $1 - u$ det, och vi kan därför lika gärna använda regeln

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln u$$

vid simulering av $\exp(\lambda)$

Simulering av oberoende observationer av en fördelning

Bilda helt enkelt slumpstal $u_1, u_2, \dots$ och omvandla vart och ett till motsv x -värde

Simulering av $\text{bin}(4, 0.2)$ med en probabilistisk metod

Låt X anta värdet 1 med sannolikheten $p = 0.2$ och 0 med sannolikheten $1 - p = 0.8$

Simulera $n = 4$ oberoende observationer av X

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

och bilda deras summa $y = \sum_i x_i$

Då blir y en simulerad observation av $\text{bin}(4, 0.2)$

Simulering av $N(0, 1)$ med Box-Mullers metod

Box-Muller visade att två stokastiska variabler X, Y är oberoende och $N(0, 1)$ -fördelade om, och endast om, motsvarande vektors längd

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

och vinkel mot X -axeln

$$\phi = \arctan \frac{Y}{X}$$

är oberoende och sådana att ϕ är $U[0, 2\pi)$ -fördelad medan R 's fördelning är definierad av tätheten

$$f(r) = re^{-r^2/2} \quad \text{för } r > 0$$

Genom att simulera en observation $r = \sqrt{-2 \ln u_1}$ av R och en oberoende observation $\phi = 2\pi u_2$ från $U[0, 2\pi)$ -fördelningen och gå från polära (r, ϕ) till kartesiska koordinater (x, y) enligt

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

får vi, enl Box-Mullers resultat, att x, y är två oberoende observationer från $N(0, 1)$ -fördelningen

Simulering av $N(\mu, \sigma)$

Börja med att simulera en observation z från $N(0, 1)$ -fördelningen

Bilda sedan $x = \mu + \sigma z$

Simulering av $\text{LN}(\mu, \sigma)$

Börja med att simulera en observation y från $N(\mu, \sigma)$ -fördelningen

Bilda sedan $x = e^y$