# Sannolikhetsteori, MSG110
# Tentamen 2019-01-04

**Tid:** 8.30-12.30
**Hjälpmedel**: Chalmersgodkänd räknare, egen handskriven formelsamling (4 A4-sidor) och till skrivningen medföljande tabeller.
**Examinator**: Johan Tykesson, 0703182096
**Telefonvakt/rond**: Andreas Petersson, 5325.
**Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!**
**OBS: text på TVÅ sidor!**
**Betygsgränser:** För betyg G krävs minst 12 poäng, för betyg VG krävs minst 20 poäng. Max poängantal är 30. Resultat klara senast 25 januari.

---

1. (1+1+2 poäng) Antag att $a > 0$ är en parameter och att den kontinuerliga slumpvariabeln $X$ har sannolikhetstäthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2a^3} & \text{för } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

   (a) Visa att $f(x)$ är en sannolikhetstäthet.
   (b) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för $X$.
   (c) Antag nu att $a = \sqrt{5/3}$ och att $X_1, \ldots, X_{100}$ är oberoende slumpvariabler med samma fördelning som $X$. Beräkna approximativt $P(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 20)$.

2. (2+2 poäng) Från en normalfördelning $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ får vi ett stickprov av storlek 8, där stickprovsmedelvärdet blev 3.8. Från en annan normalfördelning $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ får vi ett stickprov av storlek 8, där stickprovsmedelvärdet blev 4.2. Standardavvikelserna $\sigma_1$ och $\sigma_2$ antas vara kända och båda lika med 1.

   (a) Beräkna ett 95% två-sidigt konfidensintervall för $\mu_1$.
   (b) Beräkna ett 99% två-sidigt konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.

3. (2+2 poäng) Antag $\alpha > -2$ är en parameter och att den kontinuerliga slumpvariabeln $X$ har sannolikhetstäthet

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \alpha/2)x^{\alpha/2} & \text{för } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

   Vi får ett stickprov $x_1 = 1/4$, $x_2 = 3/4$ från $X$.

   (a) Beräkna maximum likelihood skattningen av $\alpha$.
   (b) Beräkna momentskattningen av $\alpha$.

4. (1+2+2 poäng) Antalet hjortar som passerar ett viss skogsparti under en dag antas Poissonfördelat med väntevärde 2. Antalet hjortar som passerar under olika dagar antas oberoende av varandra.

   (a) Vad är sannolikheten att det passerar exakt två hjortar under en given dag?

   (b) Låt $Y$ vara antalet dagar innan den första hjorten passerar. (Här betraktar vi $Y$ som heltal; exempelvis om det inte kommer någon hjort under den första dagen, men det kommer minst en hjort den andra dagen så blir $Y = 1$.) Beräkna $P(Y = 2)$.

   (c) Antag att vi tittar på sju dagar. Låt $Z$ vara antalet dagar av dessa som det inte passerar någon hjort alls. Beräkna $P(Z = 2)$.

5. (1.5+1.5 poäng) I en låda finns två glödlampor. Den ena lampan (lampa $A$) har en livslängd som är exponentialfördelad med väntevärde 1 månad, och livslängden för den andra lampan (lampa $B$) är exponentialfördelad med väntevärde 2 månader. Du väljer en lampa helt slumpmässigt.

   (a) Vad är sannolikheten att den valda lampan lyser efter 1 månad?

   (b) Givet att lampan lyser efter 1 månad, vad är den betingade sannolikheten det var lampa $B$ som valdes?

6. (2+2 poäng) Antag att $(X, Y)$ är en två-dimensionell kontinuerlig slumpvariabel med sannolikhetstäthet

$$f(x, y) = \begin{cases} x^{-2}y^{-2} & \text{om } x \geq 1 \text{ och } y \geq 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

   (a) Beräkna de marginella sannolikhetstätheterna för $X$ och $Y$, dvs bestäm $f_X(x)$ och $f_Y(y)$. Är $X$ och $Y$ oberoende?

   (b) Bestäm konstanten $\alpha > 0$ så att $E(X^{-\alpha}Y^{-\alpha}) = 1/4$.

7. (2 poäng) Till punkterna $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 3)$, $(x_3, y_3) = (3, 2)$ vill man anpassa ett linjärt samband $y = \alpha + \beta x$, baserat på den linjära regressionsmodellen $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$, där $\epsilon_i$ variablerna är oberoende och normalfördelade med väntevärde 0 och standardavvikelse $\sigma$ ($y_i$ värdena är alltså observationer av $Y_i$-variablerna. ) Beräkna lämpliga punktskattningar av $\alpha$ och $\beta$ (till exempel de punktskattningar man får från minsta kvadratmetoden).

8. (4 poäng) Antag att $X$ och $Y$ är oberoende kontinuerliga slumpvariabler som båda är likformigt fördelade på intervallet $[0, 1]$. Man bildar sedan en rektangel där ena sidlängden är $X$ och den andra sidlängden är $Y$. Låt $A = XY$ beteckna rektangelns area. Beräkna sannolikhetstätheten för $A$.

   **Lycka till!**