Analys o Linjär algebra

$$\boxed{f(x) = 0}$$

Lektion 1

Kurstema

Tema:

$$\boxed{f(x) = 0 \quad \text{Hitta } x \text{ !}}$$

- vad menas ?
- varför ?
- hur ?

Funktioner m.m.

Grundläggande begrepp:

- variabler
- samband
- modell
- funktion
- ekvation
- lösning
- beräkning

Funktioner m.m.

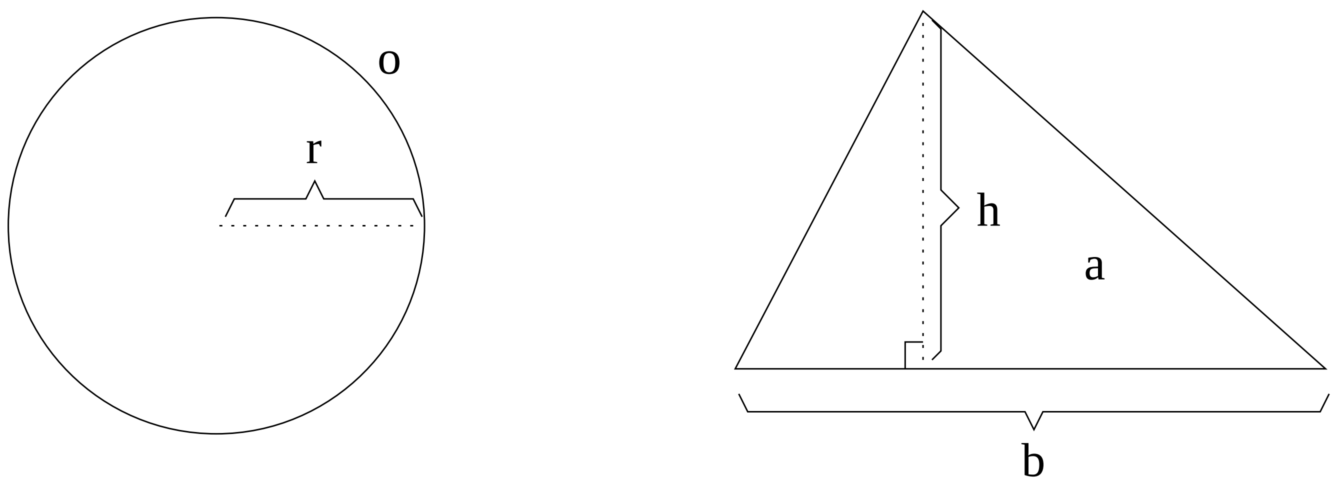
Vidare

- existens
- entydighet
- stabilitet
- residual - fel

Funktioner m.m.

Exempel För cirklar verkar gälla

$$o = c\,r,$$



där c är en konstant ≈ 6.28.

Funktioner m.m.

Exempel För trianglar gäller

$$a = \frac{b \cdot h}{2},$$

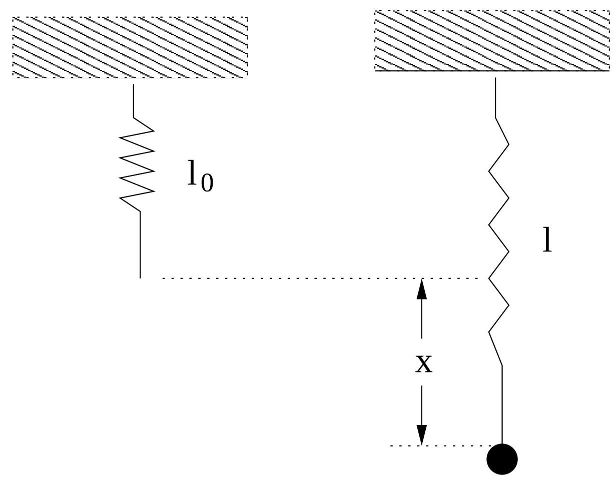
där a arean.

Här r, o, b, h, a *variabler*, där t.ex. r resp. b och h kan betraktas som *oberoende variabler*, varvid o resp. a blir *beroende variabler*.

Funktioner m.m.

Exempel För en fjäder verkar gälla (Hooke)

$$\sigma = k\,(l - l_0) = k\,x,$$



där σ spänningen/reaktionskraften, $x = l - l_0$ längdförändringen/töjningen, k konstant.

Funktioner m.m.

Variabelsambandet $\sigma = k\,x$ är en matematisk *modell* av sambandet mellan töjning och spänning (Hookes lag).

Exempel Vid fritt fall gäller

$$v = g\,t, \quad s = g\,\frac{t^2}{2},$$

där t är tiden, v
är (fall)hastigheten, s är sträckan, och g är en konstant, ≈ 10.

Funktioner m.m.

Här är v och s *funktioner* av t. Kan uttryckas

$$v = f_1(t), \quad \text{där } f_1(t) = 10\,t,$$

resp.

$$s = f_2(t), \quad \text{där } f_2(t) = 10\,\frac{t^2}{2} = 5\,t^2,$$

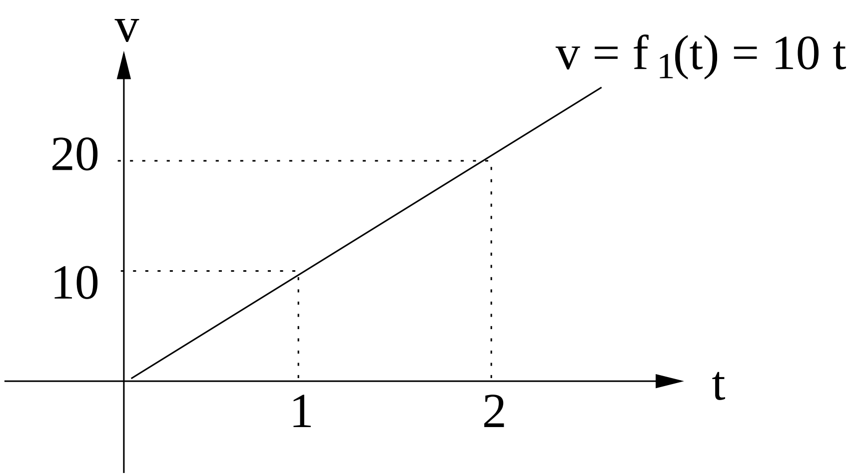
eller kortare,

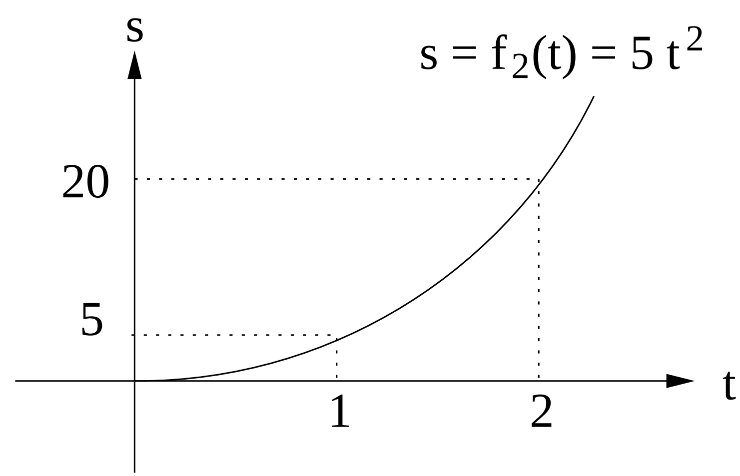
$$v(t) = 10\,t, \quad s(t) = 5\,t^2.$$

f_1 resp. f_2 utgår alltså från ett t-värde och ger motsv. hastighet $v = f_1(t)$ resp. sträcka $s = f_2(t)$.

Funktioner m.m.

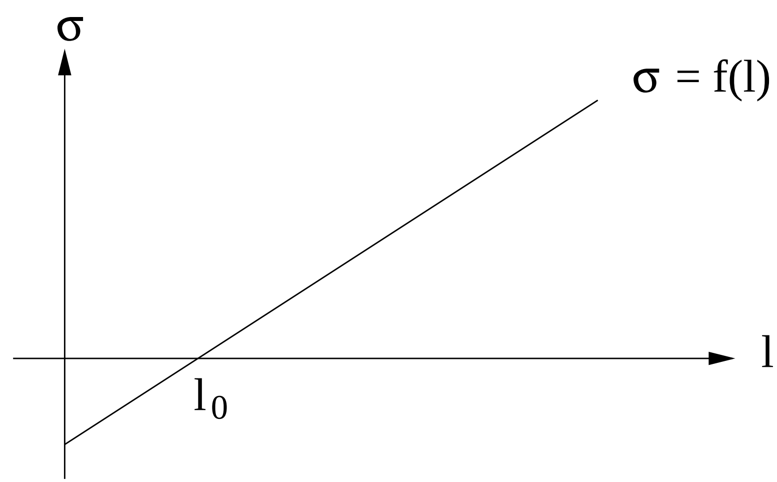
Funktioner kan visualiseras med *grafer*:





Funktioner m.m.

Sambandet $\sigma = k\,(l - l_0)$ kan åskådligas:



Vilka samband är *linjära*? Vilket är *icke-linjärt*?
Variablerna v och t är proportionella (med proportionalitetsfaktor $g \approx 10$).

Funktioner m.m.

En *ekvation* är en “likheter som vill bli uppfylld”:

Exempel Bestäm den töjning x som motsvarar spänningen 2 om $k = 3$:

$$3\,x = 2.$$

Att *lösa* en ekv. $\approx$ att hitta det/de x som “*passar*” i ekv. Här $x = \frac{2}{3} = 0.6666...$

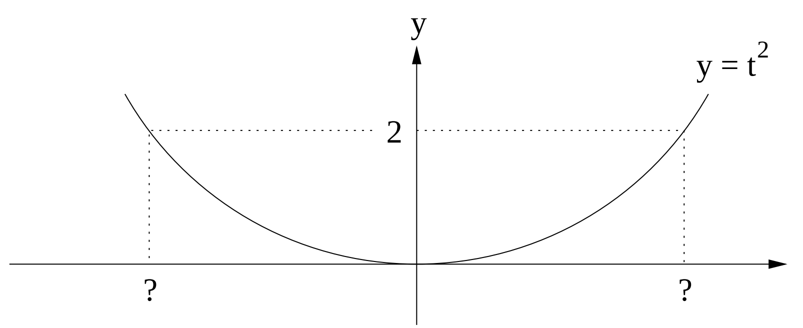
Funktioner m.m.

Exempel Bestäm den tid som motsvarar fallsträckan 10:

$$5\,t^2 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 2.$$

Vilket/vilka t passar i denna ekv.?

- Finns lösning ?
- Finns flera ?
- Är den/de *felkänsliga* ($g \approx 10$)?



Funktioner m.m.

Felkällor

Exempel Hur lång tid tar ett fritt fall på 10 meter?

Modell: $10\,\frac{t^2}{2} = 10$, $\quad$ dvs $t^2 = 2$.

Lösning: $t = 1.4$

Modelleringfel: Friktion försummad, och $g = 9.81 < 10$.

Beräkningsfel: $t = 1.4$ löser inte ekv. $t^2 = 2$ exakt, ty $1.4^2 = 1.96 \neq 2$.

Funktioner m.m.

Residual: Idealt t uppfyller $f(t) = t^2 - 2 = 0$. För vårt $t = 1.4$ gäller $f(1.4) = -0.04$, som kallas *residualfelet*, eller bara *residualen*.

Vad säger residualen om felet i t-värdet?, dvs vad säger $f(t)$-felet om t-felet? Finns samband?

Funktioner m.m.

Omskrivning av ekvation

Ekvationer med samma lösningar kallas *ekvivalenta*.

Exempel

$$x^2 = 2\,x + 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2\,x - 1}_{=:f(x)} = 0.$$

Speciellt: En ekv. kan alltid skrivas på formen $f(x) = 0$.

Funktioner m.m.

Omvänt gäller t.ex.:

$$2\,f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x + f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = g(x) \quad \text{där } g(x) = x + \alpha\,f(x) \text{ med } \alpha \neq 0.$$

Kommer att utnyttjas vid s.k. *fixpunktsiteration* senare.

Funktioner m.m.

Notera: Vid oförsiktig kan lösningar *tillkomma*:

$$x = 1 \underset{\Rightarrow}{\not\Leftrightarrow} x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = -1,$$

eller *försvinna*:

$$(x+1)\,x = 2\,x \underset{\Leftarrow}{\not\Leftrightarrow} x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

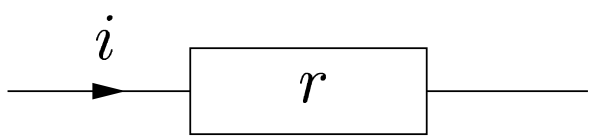
Vad är problemet här?

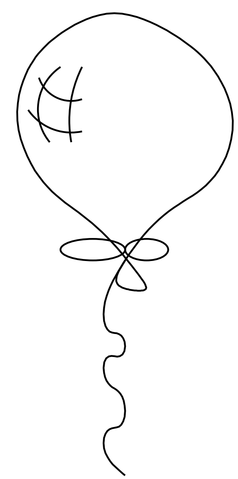
Funktioner m.m.

Funktioner av *flera variabler*

Exempel $f(b,h) = \frac{b\,h}{2}$ ger arean av $\triangle$.

Exempel $f(r,i) = r\,i^2$ ger effektutv. i ett motstånd med resistans r vid ström i





Funktioner m.m.

Exempel $f(T,V) = c\frac{T}{V}$ ger trycket p i en gas med temp. T och volym V ($c = n\,R$, n mol, R gaskonstant.)

Exempel Tempen u varierar med lägeskoord. x, y, z och tiden t, dvs $u = f(x, y, z, t)$.

Funktioner m.m.

Definitionsmängd “Tillåtna/avsedda input” till $f(x)$ betecknas $D(f)$, eller D_f.

Exempel Funktionen $f(x) = 1/x$ kan sägas ha definitionsmängd $\{x \in Q : x \neq 0\}$, dvs mängden av alla rationella tal x utom talet 0, eftersom divition med 0 inte kan definieras på ett naturligt sätt.

Funktioner m.m.

Exempel Betrakta “tryckfunktionen” $f(T,V) = c\frac{T}{V}$. Av “matematiska skäl” kan inte variabelkombinationer (T,V) med $V = 0$ ingå i definitionsmängden. Men dessutom måste man ju här tänka sig att både T och V är *positiva* tal. Varför? Vidare kan man tänkas vilja inskränka definitionsmängden ytterligare (ganska mycket) för att $f(T,V)$ skall kunna ge ett någorlunda rimligt/noggrannt värde på trycket $p = f(T,V)$.

Det är alltså upp till “konstruktören” av en funktion att bestämma dess definitionsmängd, dvs vilka argument den kan “matas” med. I matematisk mening brukar man annars tänka sig att definitionsmängden är den störsrta “möjliga”, som för funktionen $f(x) = 1/x$ ovan.

Funktioner m.m.

Värdemängd “Resulterande output”. Värdemängden för en funktion $f(x)$ betecknas $R(f)$, eller R_f (R för *range*.

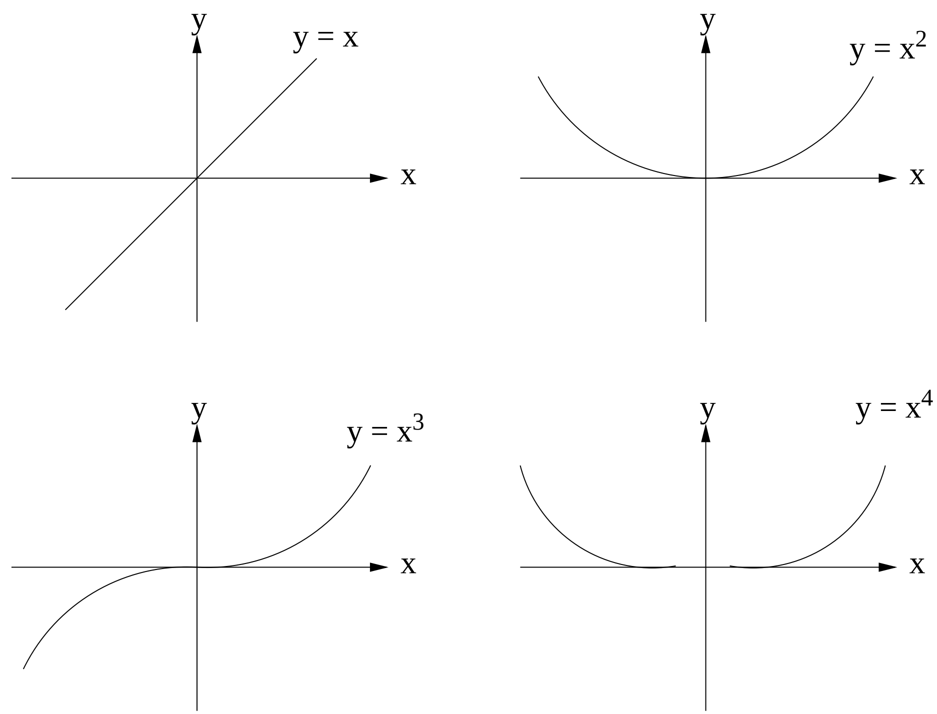
Exempel Funktionen $f(x) = 2x$ med definitionsmängden $D(f) = \{x : -1 < x \leq 2\} = (-1, 2]$ är helt enkelt $(-2, 4]$.

Exempel Lösningarna y till ekvationen $y^2 = x$ brukar ju betecknas $y = \sqrt{x}$ och $y = -\sqrt{(}x)$, dvs $f(x) = \sqrt{x}$ betecknar det *positiva* tal för vilket $(f(x))^2 = x$. Man skulle förstås lika gärna kunna ha bestämt sig för att låta $\sqrt{x}$ beteckna motsvarande *negativa* tal. Men för $f(x) = \sqrt{x}$ gäller alltså speciellt $R(f) \subset [0, \infty)$.

Funktioner m.m.

Monom, polynom och rationella funktione

De enklaste funktionerna: $x, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, \ldots$



kan (tillsammans med $x^0 := 1$) användas till att konstruera mer komplicerade fknr, *monom*, *polynom* och *rationella* fknr:

Funktioner m.m.

Monom: $-7x^3$, $2.1\,x^2, \ldots$

Polynom: $2 - x + 7\,x^3$,...

dvs summor av multipler, s.k. *linjärkombinationer*, av $1 (=: x^0)$, x, x^2, x^3,..

Funktioner m.m.

Exempel Insatskapital k_0, årsränta x, ger efter n år kapitalet $k = k_0\,(1+x)^n$. Kapitaltillväxten ges av

$$\frac{k}{k_0} = (1+x)^n = f(x).$$

För

- $n = 2$: $\quad f(x) = (1+x)^2 = (1+x)\,(1+x) = 1 + 2x + x^2$
- $n = 3$: $\quad f(x) = (1+x)^3 = 1 + 3\,x + \underbrace{3\,x^2 + x^3}_{\text{rta på rta}}$

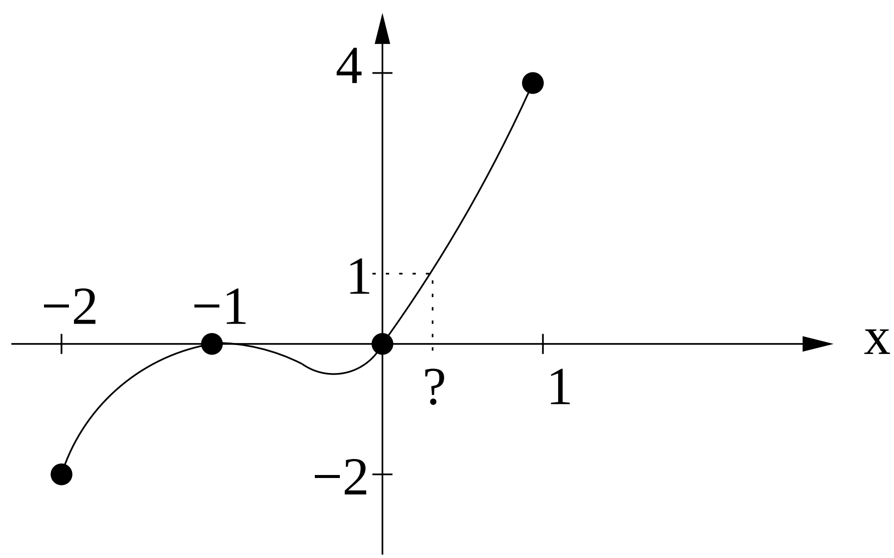
där sista resp. de två sista termerna utgörs av “ränta på ränta”.

Funktioner m.m.

Exempel Om insatskapitalet lyfts efter ett år, men räntan kvarstår ytterligare 2 år erhålls $k = k_0\, x\, (1+x)^2$. För vilket x erhålls $k = k_0$?, dvs

$$x\,(x+1)^2 = \underbrace{x + 2\,x^2 + x^3}_{=f(x)} = 1.$$

x	f(x)
−2	−2
−1	0
0	0
1	4

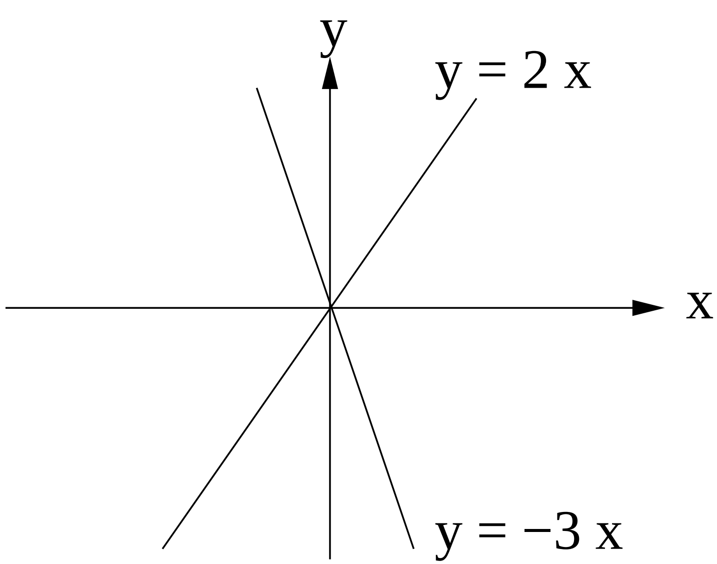


Funktioner m.m.

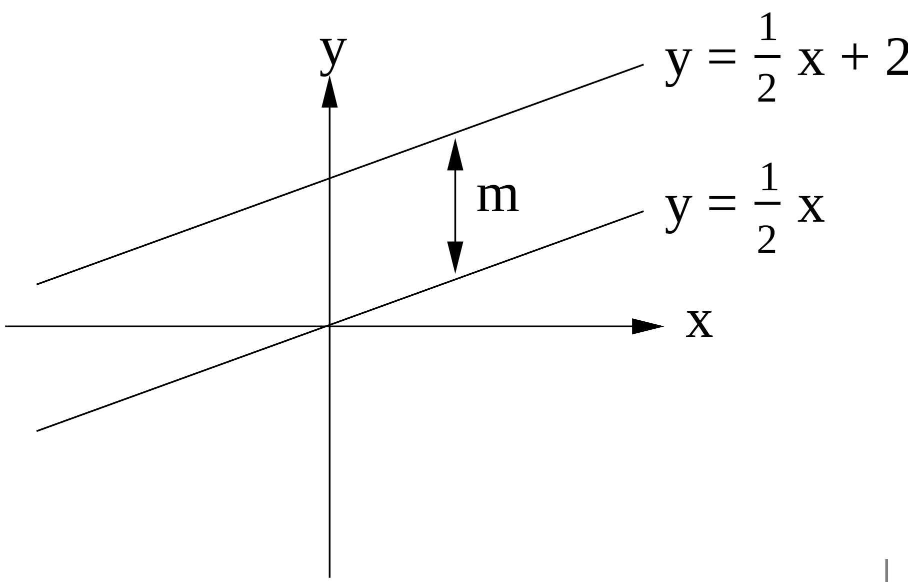
Linjära polynom/fknr

Egentligen funktioner där x och y är *proportionella*, dvs $\boxed{y = k\,x}$ men i “dagligt tal” även: $\boxed{y = k\,x + m}$:

$\boxed{y = k\,x}$



$\boxed{y = k\,x + m}$



Funktioner m.m.

$y = k\,x + m$ motsvaras av *linje* i planet. Om k och en punkt (x_1, y_1) på linjen kända, dvs ett x_1 och motsvarande $y_1 = k\,x_1 + m$, så kan m beräknas:

$$m = y_1 - k\,x_1.$$

Om två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) på linjen givna så kan både k och m beräknas:

$$\begin{aligned} y_1 &= k\,x_1 + m \\ y_2 &= k\,x_2 + m \end{aligned}$$

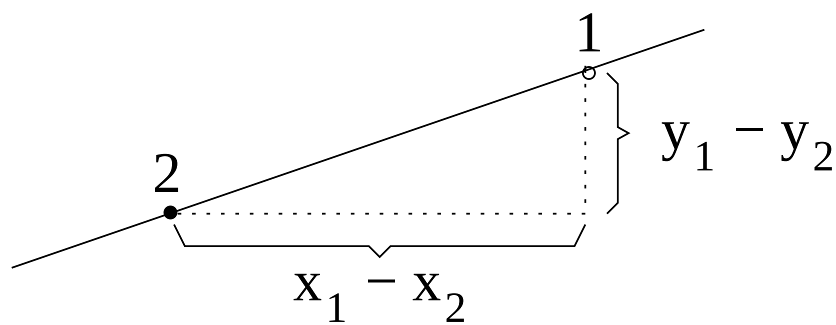
ger

$$y_1 - y_2 = k\,x_1 + m - (k\,x_2 + m) = k\,(x_1 - x_2),$$

dvs

Funktioner m.m.

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$



varefter m fås som ovan.

Funktioner m.m.

Exempel För $f(x) = k\,x + m$ gäller $f(1) = 2$ och $f(2) = -1$. Bestäm k och m:

$$2 = k \cdot 1 + m$$
$$-1 = k \cdot 2 + m$$

ger

$$2 - (-1) = k\,(1 - 2),$$

dvs

$$3 = -k, \quad k = -3,$$

varav

$$m = 2 - (-3 \cdot 1) = 5,$$

dvs

$$f(x) = -3\,x + 5. \quad \text{Kontrollera !!!}$$

Funktioner m.m.

Polynom av grad 2

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2,$$

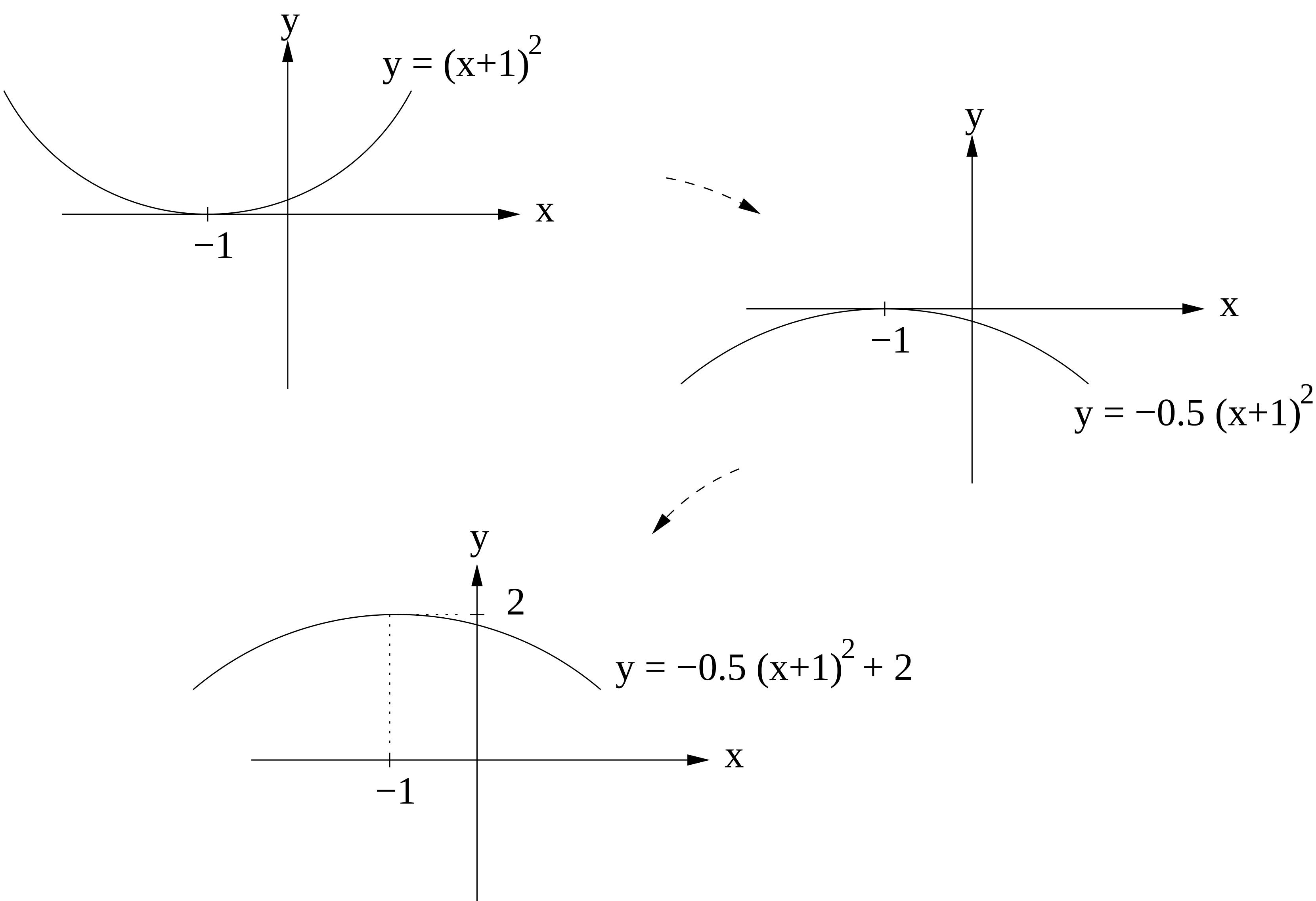
kan skrivas på formen

$$f(x) = a\,(x + b)^2 + c.$$

Underlättar visualisering/plottning bl.a.

Funktioner m.m.

Exempel $f(x) = -0.5\,(x+1)^2 + 2$ “konstruerad” i tre steg:



Funktioner m.m.

Omskrivningen bygger på *kvadratkomplettering*:

Exempel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 6\,x + 5 \\
&= \underbrace{x^2 + 6\,x + 3^2}_{(x+3)^2} - 3^2 + 5 \\
&= (x+3)^2 - 3^2 + 5 \\
&= (x+3)^2 - 4
\end{aligned}
$$

Kvadratkomplettering ligger till grund för lösn. proceduren för 2:a gradsekv.:

Funktioner m.m.

Exempel

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 6\,x + 5 = 0 \quad\Leftrightarrow\\
&(x+3)^2 - 3^2 + 5 = 0 \quad\Leftrightarrow\\
&(x+3)^2 = 3^2 - 5 \quad\Leftrightarrow\\
&x + 3 = \pm\sqrt{3^2 - 5} \quad\Leftrightarrow\\
&x = -3 \pm \sqrt{3^2 - 5}.
\end{aligned}
$$

Funktioner m.m.

Har mött *polynom*-funktioner

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + .. + a_n\,x^n,$$

(av *grad* n om $a_n \neq 0$) där $a_0, a_1, a_2, .., a_n$ är givna tal/konstanter, dvs *linjärkombinationer* av de enklaste funktionerna $1, \quad x. \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, ...$ Linjärkombinationer av hela *polynom* ger nya polynom.

Exempel

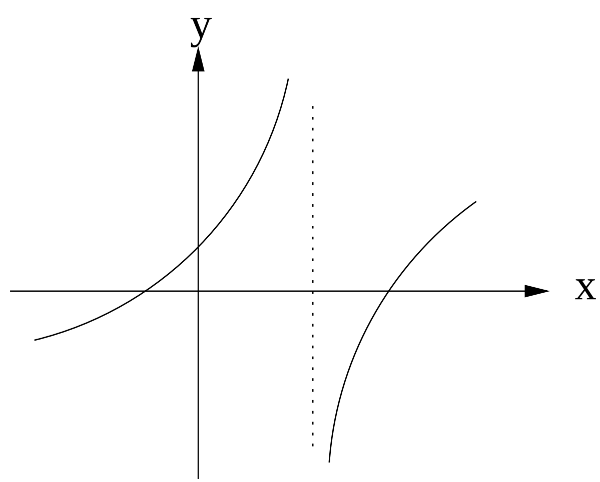
$$2\,(1 - 2\,x) - 3\,(3\,x + x^3) = 2 - 13\,x - 3\,x^3.$$

Funktioner m.m.

Även multiplikation av polynom ger nya polynom. Kvoter mellan polynom ger däremot en ny typ av fkn, s.k. *rationella* fknr.

Exempel

$$f(x) = \frac{1+x}{1-2\,x}$$



Funktioner m.m.

Dvs polynom kan i sin tur adderas (allmännare linjärkombineras), multipliceras o. divideras. Division ger s.k. *rationella* fknr.

Exempel $f(x) = 1 - 2\,x$, $g(x) = 3\,x + x^3$ ger

$$f(x) + g(x) = 1 + x + x^3 =: (f + g)(x)$$
$$f(x)\,g(x) = 3\,x - 6\,x^2 + x^3 - 2\,x^4 =: (f\,g)(x)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2\,x}{3\,x+x^3} =: (\tfrac{f}{g})(x).$$

Den naturliga *definitionsmängden* för funktionen $\frac{f}{g}$ är förstås $\{x : x \in D(f) \cap D(g), g(x) \neq 0\}$.

Funktioner m.m.

Partialbråksuppdelning: Exempel:

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2},$$

där $A = 1/3$ och $B = 5/3$, ty

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} = \frac{(x+2)\,A + (x-1)\,B}{(x-1)(x+2)} = \frac{(\overbrace{A+B}^{=2})\,x + (\overbrace{2A-B}^{-1})}{x^2+x-2},$$

vilket ger A och B.

Funktioner m.m.

Generellt: Allmänt följer man schemat

- om täljarens gradtal $\geq$ nämnaren utförs först *polynomdivision*
- nämnaren *faktoruppdelas*
- lämplig *ansats* ställs upp
- koefficienterna identifieras

Funktioner m.m.

Exempel:

$$\frac{2x+1}{x^3+x} = \frac{2x+1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B\,x+C}{x^2+1},$$

varefter A, B och C beräknas som förut. Observera att linjär täljare måste ansättas om nämnaren av grad 2!

Funktioner m.m.

Exempel:

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3(2x+1)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{2x+1},$$

varefter $A..D$ beräknas som förut. Observera att multipla nämnarfaktorer kräver speciell ansats!

Funktioner m.m.

Polynomdivision

Givet polynom $p(x)$ av grad m och $q(x)$ av grad n, så finns polynom $k(x)$ och $r(x)$ sådana att

$$p(x) = k(x)\, q(x) + r(x),$$

och där “restpolynomet” $r(x)$ har grad $< n$.

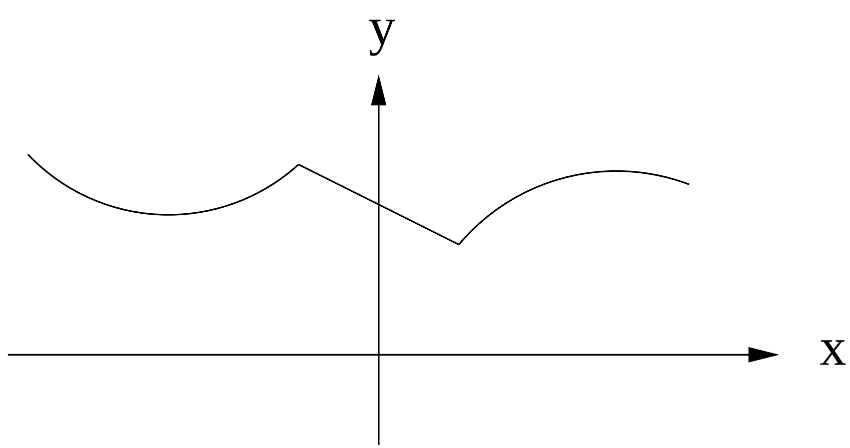
Exempel: $\underbrace{x^3 - x + 2}_{p(x)} = (x-1)\,(\underbrace{x^2 + x - 1}_{q(x)}) + (x+1)$.

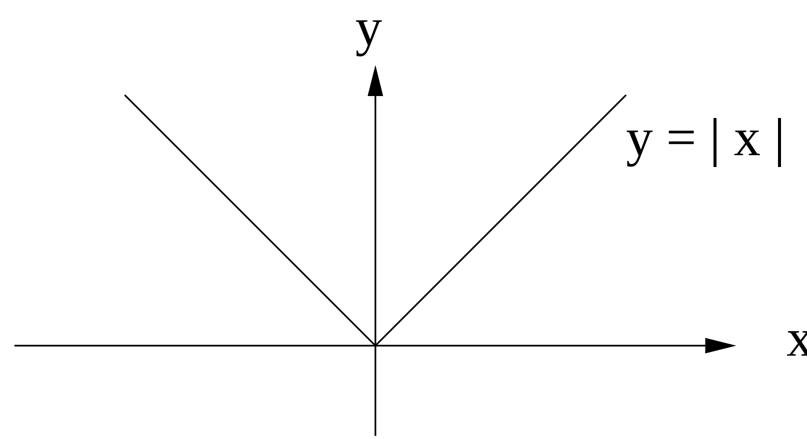
Polynomen $k(x)$ och $r(x)$ beräknas som följer:

Funktioner m.m.

Kommer även att jobba mkt med funktioner som “styckvis” är polynom, s.k. “styckvis polynom”.

Exempel





Funktioner m.m.

Sammansättning av fknr

$$x \to f(x) = y \to g(y).$$

Den *sammansatta* funktionen

$$g(f(x))$$

betecknas även $(g \circ f)(x)$.

Funktioner m.m.

Exempel $f(x) = 1 + x^2$, $g(y) = 4\,y$ ger

$$g(f(x)) = 4\,(1 + x^2)$$
$$f(g(x)) = 1 + (4\,x)^2,$$

dvs observera speciellt att $f \circ g \neq g \circ f$ i allmänhet. (Vad betyder “i allmänhet” här?).

Funktioner m.m.

Hur lösa $f(X) = 0$?

Har mött ekv.

$$\text{I} \qquad 3\,x = 2,$$

motsv given spänning 2 och styvhet 3, och x sökt töjning, och

$$\text{II} \qquad x^2 = 2$$

motsv fritt fall 10 (m) med x sökt falltid.
I har lösning

$$x = \frac{2}{3} \underbrace{=}_{\text{vad menas?}} 0.666666\ldots.$$

Funktioner m.m.

Lättare greppa *ändliga* decimalutvecklingar:

$$0.\underbrace{666..6}_{n\text{ 6:or}}n$$

Har att $\frac{2}{3} \underbrace{\approx}_{\text{hurdå }\approx?} 0.666..6_n$. Jo,

$$|\frac{2}{3} - 0.666..6_n| \leq 10^{-n},$$

dvs kan få $0.666..6_n$ “hur nära $2/3$ som helst”! (genom att välja n tillräckligt stort för aktuellt behov).

Funktioner m.m.

Säger att följden

$$0.6,\ 0.66,\ 0.666,\ ..$$

betecknad $\{0.666..6_n\}_{n=1}^{\infty}$, *konvergerar* mot $\frac{2}{3}$, vilket kortfattat skrivs

$$\mathrm{lim}_{n\to\infty} 0.666..6_n = \frac{2}{3},$$

eller ibland

$$0.666..6_n \to \frac{2}{3}, \quad \text{då } n \to \infty.$$

Notera likhetstecknet i “limesvarianten”!

Funktioner m.m.

Periodiska decimalutvecklingar

Rationella tal som $\frac{2}{3}$ och $\frac{2}{11}$ har *periodiska* decimalutvecklingar (AM:B&S sid. 58). Exempel:

$$\frac{2}{11} = 0.18\,18\,18\,18\,18\ldots$$

Omvänt, (AM:B&S sid. 59-61) Periodiska decimalutvecklingar motsvarar rationalla tal!

Men, det finns ju..

Funktioner m.m.

Icke-periodiska decimalutvecklingar

Exempel

$$0.10100100010000100..$$

Detta måste alltså vara ett "*icke* rationellt", eller *irrationellt*, tal.

Funktioner m.m.

Talet $\sqrt{2}$, om det nu finns, måste också vara irrationellt, ty antag $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ med p och q heltal, och att vi förkortat så att ej båda *jämna*. Då gäller

$$p^2 = 2\,q^2,$$

dvs p måste vara jämnt, dvs $p = 2\,k$ för ngt heltal k, dvs

$$(2\,k)^2 = 4\,k^2 = 2\,q^2,$$

varav följer att även q måste vara jämnt. Kommer alltså till en *motsägelse* som visar att $\sqrt{2}$ *ej* kan vara $= \frac{p}{q}$, dvs rationellt.

Funktioner m.m.

Hur beräkna $\sqrt{2}$?

dvs hitta decimalerna i $\sqrt{2} = 1.414...$.

Bisektion, eller intervallhalvering

Söker x s.a. $f(x) = x^2 - 2 = 0$. Finner att $f(1) = -1 < 0$ och att $f(2) = 3 > 0$. Söker x mellan $x = 1$ och $x = 2$. Kollar *mittpunkten* $x = 1.5$. Finner att $f(1.5) = f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0$. Koncentrerar oss på intervallet $[1, 1.5]$ och kollar nya mittpunkten $x = 1.25$: $f(1.25) = f(\frac{5}{4}) = \frac{25}{16} - 2 < 0$, osv...

Funktioner m.m.

i	x_i	X_i
0	1	2
1	1	1.5
2	1.25	1.5
3	1.375	1.5
4	1.375	1.4375
5	1.40625	1.4375
6	.	.

Ser att skillnaden $X_i - x_i$ blir mindre o. mindre, och att fler och fler decimaler överensstämmer i x_i och X_i.

Funktioner m.m.

Uppgift: Skriv ett matlab program som succesivt beräknar talen x_i (och X_i), här $1, 1, 1.25, 1.375, 1.40615, ..,$ för godtycklig ekvation $f(x) = 0$ med givna x_0 och X_0 sådana att $f(x_0)$ och $f(X_0)$ har olika tecken.

Funktioner m.m.

```
function int = MyBisect(f, int, tol)
% Solves f(x) = 0, that is, given f = f(x)
% and an interval int = [a,b]
% on which f changes sign, and a tolerance
% tol, the solver uses succesive
% bisection of the given interval int to
% finds a subinterval int of length
% at most tol, containing a solution x.
```

Funktioner m.m.

```
%
% input arguments:
%   f    a string (such as 'sin(x)')
%        representing f(x)
%   int  an interval [a,b] such
%        that f(a)*f(b)<0, that is, on which
%        f(x) changes sign
%   tol  a given (positive) tolerance
%        (such as 0.001)

while diff(int) > tol
```

Funktioner m.m.

```
while diff(int) > tol
  x = int(1);
  leftValue = eval(f);
  x = int(2);
  ...
  x = sum(int)/2;
  midpointValue = eval(f);
  if leftValue * midpointValue < 0
   int(2) = x;
  elseif ...
   int(1) = x;
  else
..
```

Funktioner m.m.

```
while diff(int) > tol
..
  if leftValue * midpointValue < 0
   int(2) = x;
  elseif ...
   int(1) = x;
  else
   disp('Check that f changes sign on given
interval!')
   return
  end
end
```

Funktioner m.m.

- komplettera koden enligt angivna specifikationer
- kör ett antal testexempel
- komplettera med data-check
- komplettera med auto-stop vid icke-konvergens
- skriv variant som levererar en approximtiv rot som utdata

Funktioner m.m.

Konvergens

Noterar att följden $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ “försöker konvergera”, men mot vad? Jo, mot

$$1.414213562373....$$

Problemet är nu: Hur räknar man med sådana tal? Multiplicerar med 2 t.ex.? Återkommer till detta !

Funktioner m.m.

Fixpunktsiteration

Skriver om ekv $f(x) = 0$ som

$$\underbrace{x + \alpha f(x)}_{=:g(x)} = x, \quad \text{med ngt } \alpha \neq 0.$$

Söker x s.a. $g(x) = x$, dvs g lämnar x fixt!

Idé: Tag godtyckligt x_0 och mata in i g. Kalla resultatet x_1, dvs $x_1 = g(x_0)$. Om $x_1 = x_0$ är allt klart; x_0 är en fixpunkt, eller hur? Annars, mata in x_1 i g och kalla resultatet x_2, osv, dvs sätt

$$x_i = g(x_{i-1}).$$

Funktioner m.m.

Dvs, iterationen

$$x_{i-1} \to g(x_{i-1}) =: x_i$$

ger följd $x_0, x_1, x_2, x_3, .., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ...$.
Om följden $x_0, x_1, x_2, ..$ *konvergerar*, dvs talen i följden allt mindre skiljer sig åt, ger detta fler och fler decimaler i en lösning till $x = g(x)$.

Funktioner m.m.

När konvergens?

Frågar oss först: Ligger x_2 närmare x_1 än vad x_1 ligger nära x_0?:

$$x_2 = g(x_1) \quad \text{och} \quad x_1 = g(x_0)$$

ger

$$|x_2 - x_1| = |g(x_1) - g(x_0)|.$$

Om nu g är en fkn sådan att

$$|g(z) - g(y)| \leq L|z - y|,$$

för alla möjliga z, y med $\boxed{L < 1}$ så blir svaret ja, vilket leder till konvergens!

Funktioner m.m.

Har sökt lösn $\bar{x}$ till $f(x) = 0$ med *bisektion*, och till $g(x) = x$ med *fixpunktsiteration*, dvs

$$x_{j+1} = g(x_j).$$

Har också noterat att $g(x) = x$ kan skrivas $f(x) = 0$, t.ex. med $f(x) = g(x) - x$, och omvänt att $f(x) = 0$ kan skrivas $g(x) = x$, t.ex. med $g(x) = x + \alpha f(x)$, $\alpha \neq 0$.

Ekvationen $g(x) = x$ uppkommer ofta naturligt:

Funktioner m.m.

Exempel Du säljer jultidningar för x (tusen) kr. Förlaget tar 25%, plus $250 :-$ i fast avgift. Hur mycket måste du sälja för att nå “break even”? Jo, så att

$$\text{inkomsten} = x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = \text{kostnaderna},$$

dvs $x = \frac{1}{3} = 0.333...$ (tusen) kr.

Funktioner m.m.

Vad ger fixpunktsiteration i detta fall? Tar $x_0 = 0$ som exempel. Får

$$\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) = \tfrac{1}{4}x_0 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}, \\
x_2 &= g(x_1) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}, \\
x_3 &= g(x_2) = \tfrac{1}{4}\,(\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4} = (\tfrac{1}{4})^3 + (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}, \\
&.. \\
x_j &= (\tfrac{1}{4})^j + (\tfrac{1}{4})^{j-1} + ... + (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

S.k. *geometrisk summa* eller dito *serie*.

Funktioner m.m.

Allmänt: $s = a + a^2 + a^3 + .. + a^{j-1} + a^j$ beräknas genom multiplikation med $1 - a$:

$$
\begin{aligned}
&(1-a)\, s = (1-a)\,(a + a^2 + .. + a^j) \\
&= a + a^2 + .. + a^j \\
&-a^2 - a^3 - .. - a^j - a^{j+1} = a - a^{j+1},
\end{aligned}
$$

dvs

$$
s = \frac{a - a^{j+1}}{1 - a}, \quad \text{för } a \neq 1.
$$

Analogt: $s = a^i + a^{i+1} + .. + a^j = \frac{a^i - a^{j+1}}{1-a}$.

Funktioner m.m.

För fixpunktiteration ovan gäller alltså :

$$x_j = \frac{1/4 - (1/4)^{j+1}}{1 - 1/4} = \frac{1 - (1/4)^j}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,(\frac{1}{4})^j \to \frac{1}{3},$$

då $j \to \infty$.

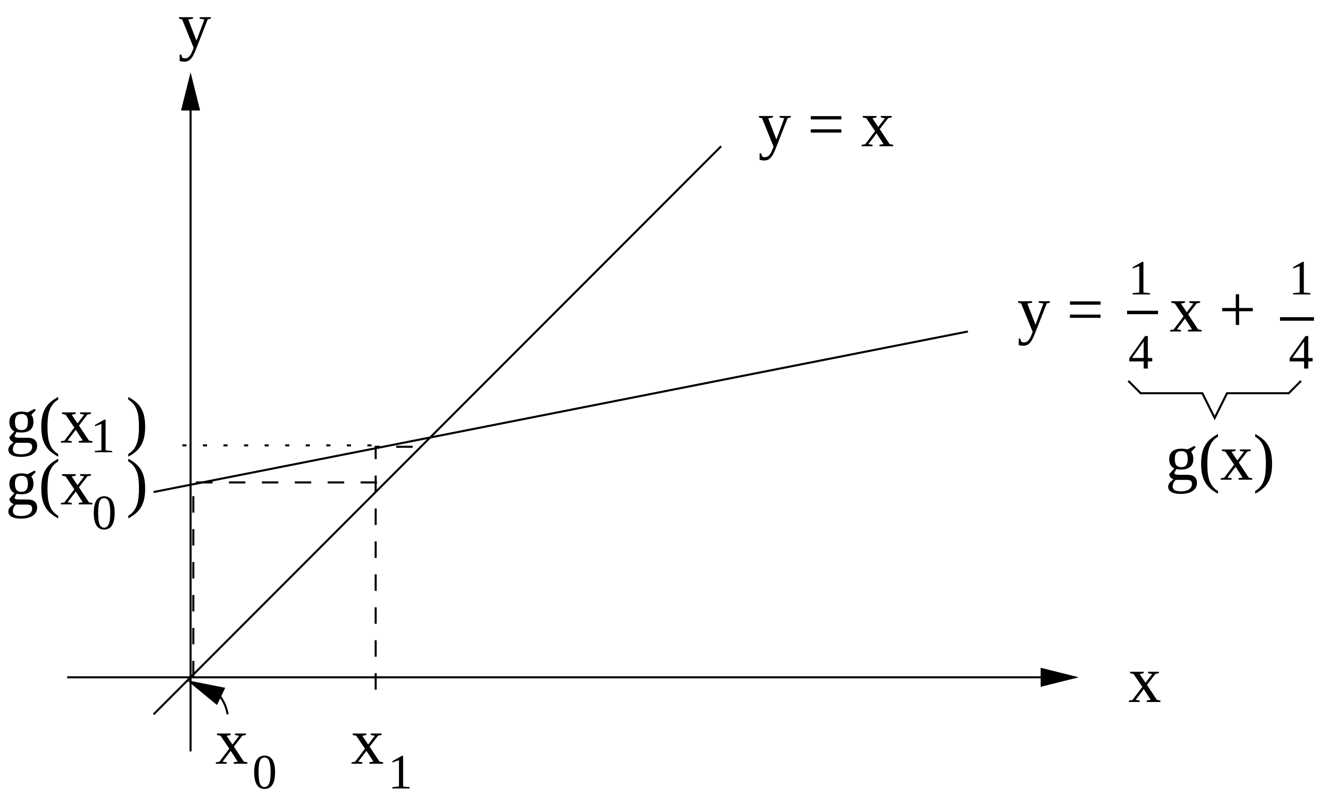
Säger att *följden* $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ *konvergent* med *gränsvärdet* $\bar{x} = 1/3$:

$$\mathrm{lim}_{j\to\infty} x_j = \bar{x} = 1/3,$$

och har redan noterat att gränsvärdet $\bar{x} = 1/3$ löser den givna ekvationen $g(x) = x$.

Funktioner m.m.

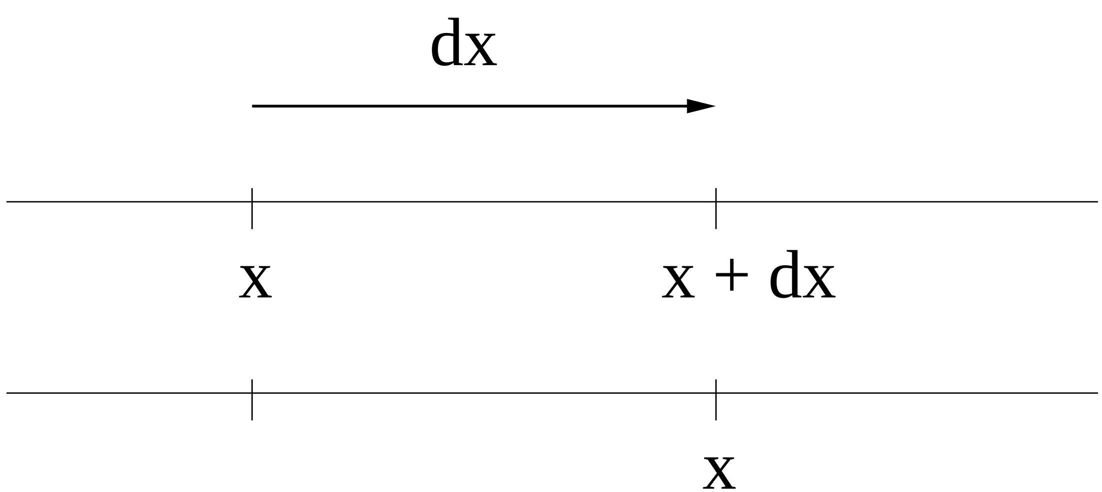
“Geometriskt” har följande hänt:



Funktioner m.m.

```
function x = MyFixedP(g, x, tol)

...
while abs(dx) > tol
...
dx = ...
x = x + dx;
...
end
```



Funktioner m.m.

Supply

- comments
- data checks
- non-convergence auto-stop
- system version
- g as sting/eval or as function
- testing, double root
- applications

Funktioner m.m.

Följden $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ konvergent med gränsvärdet $\bar{x} = 1/3$ ty

$$|x_j - \bar{x}| = \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^j \leq 10^{-j/2},$$

dvs x_j kan fås att överensstämma med $\bar{x}$ med godtyckligt många decimaler, genom att ta j tillräckligt stort. Brukar uttryckas: Till godtyckligt litet $\epsilon > 0$ finns N s.a.

$$|x_j - \bar{x}| \leq \epsilon \quad \text{om bara } j \geq N.$$

Funktioner m.m.

Kan man veta om en följd är konvergent utan att känna $\bar{x}$, dvs dess ev. gränsvärde?

Defintion En följd $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ är en *Cauchy följd* om till godt. litet $\epsilon > 0$ finns N s.a.

$$|x_i - x_j| \leq \epsilon \quad \text{om bara } i\&j \geq N.$$

Funktioner m.m.

En konvergent följd måste vara Cauchy, ty givet $\epsilon > 0$ kan vi då hitta N s.a.

$$|x_i - x_j| \leq |x_i - \bar{x}| + |x_j - \bar{x}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

för $i, j \geq N$. Har här utnyttjat *triangelolikheten* (för rationella tal).

Funktioner m.m.

Omvänt definierar en Cauchyföljd en entydigt bestämd decimalutveckling, ty om t.ex. vi tar $\epsilon = 10^{-7}$ så finns N s.a. alla talen x_i och x_j med $i, j \geq N$ skiljer sig åt först i 7:e decimalen, och om vi tar $\epsilon = 10^{-50}$ så finns N (gissningsvis större än det förra) s.a. x_i, x_j med $i, j \geq N$ alla överensstämmer i de 50 första decimalerna, osv.

Funktioner m.m.

Åter till bisektionsalg. applicerad på ekv. $f(x) = x^2 - 2 = 0$, vilken med $x_0 = 1$, $X_0 = 2$ genererar följd av intervall $[x_j, X_j]$ mer $X_j - x_j = 2^{-j}$ och $[x_{j+1}, X_{j+1}] \subset [x_j, X_j]$ ($\subset$ delmängd av/innehållet i). Följden $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ bildar då en Cauchyföljd, ty för $i \geq j$ gäller ju $x_i \in [x_j, X_j]$ och därmed

$$|x_i - x_j| \leq 2^{-j},$$

dvs givet $\epsilon > 0$ finns N s.a.

$$|x_i - x_j| \leq \epsilon \quad \text{om bara } i, j \text{ tillr. stora } (\geq N).$$

Men då måste följden $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ vara konvergent och ha ett (rationellt eller irrationellt) gränsvärde $\bar{x}$.

Funktioner m.m.

Men vet vi nu att detta $\bar{x}$ löser den givna ekvationen, dvs att

$$f(\bar{x}) = \bar{x}^2 - 2 = 0 \quad ?$$

Notera att vi inte kan beräkna $\bar{x}^2$ t.ex. för irrationalla $\bar{x}$. Vi löser problemet genom att helt enkelt *definiera*

$$f(\bar{x}) = f(\lim_{j\to\infty} x_j) = \lim_{j\to\infty} f(x_j),$$

om detta är “möjligt”, dvs om följden $\{f(x_j)\}_{j=0}^{\infty}$ visar sig konvergent så att den har ett gränsvärde

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j).$$

Noterar att $f(x_j)$ är väldefinierat rationellt tal. Alltså gäller det nu bara att visa att $\{f(x_j)\}_{j=0}^{\infty}$ är en Cauchyföljd.

Funktioner m.m.

Men för funktionen f och alla $x, y \in Q$ med $1 \leq x, y \leq 2$ gäller

$$(L) \qquad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

med $L = 4$, ty

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - 2 - (y^2 - 2)| = |x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)|$$
$$= |x + y|\,|x - y| \leq 4\,|x - y|,$$

dvs (L) gäller med L högst 4. Men härav följer att

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq 4|x_i - x_j| \leq \epsilon$$

om bara i, j tillr. stora, dvs $\{f(x_j)\}$ Cauchyföljd ty $\{x_j\}$ Cauchyföljd & f *Lipschitskontinuerlig* (uppfyller (L)).

Funktioner m.m.

Sats Om f Lipschitzkontinuerlig på $[x_0, X_0]$ och $f(x_0)\,f(X_0) < 0$ så konvergerar följden $\{x_j\}$ i bisektionsalgoritmen mot en *rot* $\bar{x}$ till $f(x) = 0$, dvs s.a. $f(\bar{x}) = 0$.

Funktioner m.m.

Har sett hur bisektion tillämpad på ekv $f(x) = x^2 - 2 = 0$ (med t.ex. $x_0 = 1$ och $X_0 = 2$) ger en *följd* $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ och en följd $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$, s.a.

$$(*) \qquad f(x_j) = x_j^2 - 2 < 0 < X_j^2 - 2 = f(X_j).$$

Följden $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ (liksom $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$) är en Cauchy följd, vilken definierar ett entydigt bestämt (rationellt eller irrationallt) reellt tal $\bar{x}$ med

$$\lim_{j\to\infty} = \bar{x}.$$

Funktioner m.m.

Ställde frågan: Löser detta $\bar{x}$ den givna ekv., dvs gäller

$$f(\bar{x}) = f(\text{lim}_{j\to\infty} x_j) = 0 \quad ?$$

Eftersom funk. $f(x) = x^2 - 2$ fanns vara Lipschitz kontinuerlig i det aktuella intervallet $[1, 2]$, dvs s.a.

$$|f(a) - f(b)| \leq L|a - b| \quad \text{för alla } a, b \text{ i } [1, 2],$$

med $L = 4$, följer att även följden $\{f(x_j)\}_{j=0}^{\infty}$ av motsvarande funktionsvärden är Cauchy. Vi kan därför *definiera*

$$f(\bar{x}) = f(\text{lim}_{j\to\infty} x_j) = \text{lim}_{j\to\infty} f(x_j),$$

dvs vi har lyckats ge mening åt $f(\bar{x})$. Nu återstår att kolla att $f(\bar{x}) = 0$, dvs att

Funktioner m.m.

$$\text{lim}_{j\to\infty} f(x_j) \;=\; 0.$$

?

Men enl. (*) har vi

$$|f(x_j) - 0| = |x_j^2 - 2 - 0| \leq |x_j^2 - 2 - (X_j^2 - 2)| = |x_j^2 - X_j^2|$$
$$|(x_j + X_j)(x_j - X_j)| \leq 4\,|x_j - X_j| = 4\,2^{-j} \leq \epsilon,$$

för godtyckligt litet $\epsilon > 0$, om bara j tillr. stort, dvs

$$f(x_j) \to 0 \quad \text{då} \;\; j \to \infty,$$

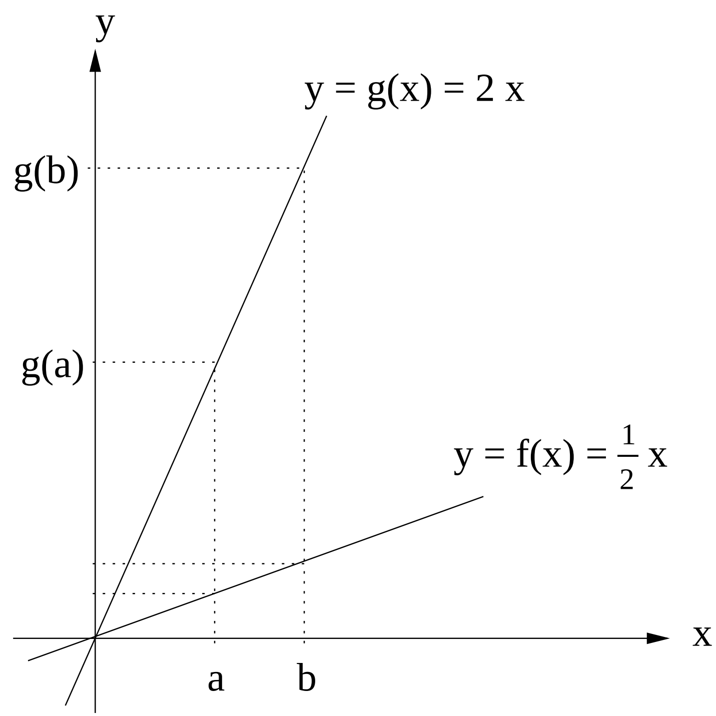
eller

$$\text{lim}_{j\to\infty} f(x_j) = 0.\text{QED}$$

Funktioner m.m.

Lipschitz kontinuitet

Exempel Linjära funktioner är Lipschitz kontinuerliga:



Funktioner m.m.

I exemplet:

$$|f(a) - f(b)| \leq \tfrac{1}{2}\,|a - b|, \qquad L = 1/2,$$
$$|g(a) - g(b)| \leq 2\,|a - b|, \qquad L = 2.$$

Mera allmänt: $f(x) = k\,x + l$ Lipschitz kont. med $L = |k|$.

Funktioner m.m.

Exempel Har redan visat att $f(x) = x^2 - 2$ är Lipschitz kont. på $[1, 2]$ med $L = 4$.

Exempel $f(x) = x^3$ är Lipschitz kont. på $[-c, c]$ med $L = 3\,c^2$, ty

$$|f(a) - f(b)| = |a^3 - b^3| = |(a^2 + a\,b + b^2)\,(a - b)|$$
$$\leq (|a^2| + |a|\,|b| + |b^2|)\,|a - b| \leq 3\,c^2\,|a - b|.$$

Funktioner m.m.

Exempel Polynom $f(x) = a_0 + a_1\,x + .., +a_n\,x^n$ är Lipschitz kont. på begränsade intervall $[-c, c]$ (för givna rationella coefficienter a_j).

Exempel Funktionen $f(x) = |x|$ är Lipschitz med $L = 1$:

$$|\,|a| - |b|\,| \leq |a - b|.$$

T.ex. gäller om $|a| < |b|$:

$$|b| \leq |a + b - a| \leq |a| + |b - a|,$$

dvs

$$|\,|a| - |b|\,| = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

Funktioner m.m.

Enl. ovan har vi för Lipschitz kontinuerliga funktioner $f(x)$ kunnat ge mening åt $f(\bar{x})$ även för irrationella $\bar{x}$. Speciellt kan vi då ge mening åt sånt som $2 \cdot \sqrt{2}$ och π^3, eftersom $f(x) = 2x$ är Lipschitz, liksom $g(x) = x^3$ på begränsade intervall, som t.ex. $[0, 4]$ innehållande det irrantionella talet $\pi = 3.14159...$ (som figurerar i vårt allra första exempel i formen $2\,\pi \approx 6.28$).

Funktioner m.m.

Men hur beräknar man då sådant som involverar mer än ett irrationellt tal, som t.ex. $\sqrt{2}\,\pi$?
Det visar sig att nyckeln till ett svar på sådana frågor är att betrakta funktioner av *flera variabler*, i det aktuella fallet vill vi för irrationella tal $\bar{x}$ och $\bar{y}$ kunna beräkna

$$f(\bar{x},\bar{y}) = f(\lim x_j, \lim y_j) = \lim x_j \lim y_j = \bar{x}\,\bar{y}.$$

Funktioner m.m.

Vi definerar som för en Lipschitz kontinuerlig funktion av en variabel:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = f(\text{lim} x_j, \text{lim} y_j) = \text{lim}_{j\to\infty} f(x_j,y_j).$$

Som tidigare är detta ok om $\{f(x_j,y_j)\}$ bildar en Cauchyföljd. Vi undersöker därför om f Lipschitz, dvs om

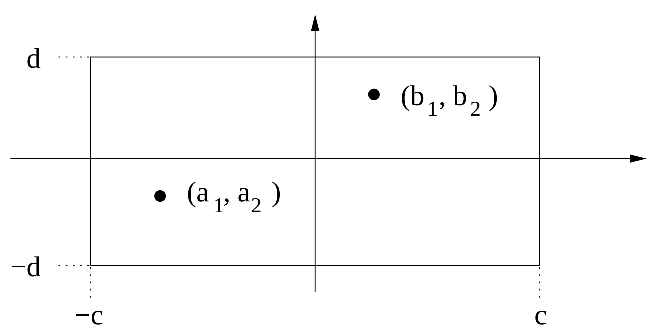
$$|f(a_1,a_2) - f(b_1,b_2)| \leq L(|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|),$$

för alla aktuella $a = (a_1,a_2)$ och $b = (b_1,b_2)$.

Funktioner m.m.

För $f(x,y) = x\,y$ finner vi att

$$|f(a_1,a_2) - f(b_1,b_2)| = |a_1\,a_2 - b_1\,b_2|$$
$$= |a_1\,a_2 \underbrace{-a_2\,b_1 + a_2\,b_1}_{=0} - b_1\,b_2|$$
$$= |a_2\,(a_1 - b_1) + b_1\,(a_2 - b_2)| \le |a_2|\,|a_1 - b_1| + |b_1|\,|a_2 - b_2|$$
$$\le d\,|a_1 - b_1| + c\,|a_2 - b_2| \le \underbrace{\max(c,d)}_{=:L}\,(|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|)$$



Funktioner m.m.

Byt nu (a_1, a_2) mot (x_i, y_i) och (b_1, b_2) mot (x_j, y_j), och det följer att

$$|f(x_i, y_i) - f(x_j, y_j)| \leq L\,(|x_i - x_j| + |y_i - y_j|) \leq \epsilon,$$

för godtyckligt litet $\epsilon > 0$ om bara i, j tillr. stora, dvs $\{x_j\, y_j\}$ är en Cauchyföljd.

x_j	y_j	$x_j\ y_j$
3.1	1.4	4.34
3.14	1.41	4.4274
3.141	1.414	4.441374
3.1415	1.4142	4.4427093
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
π	$\sqrt{2}$	$\not\longrightarrow\ \pi\ \sqrt{2}$

Funktioner m.m.

Funktionen $f(x) = x^r$

Vill här för $r = p/q$ rationellt med $p, q > 0$ och $x \geq 0$ definera $f(x) = x^r$.

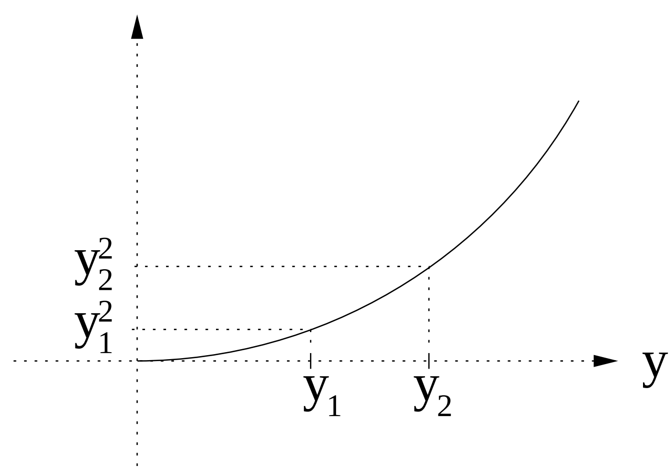
Exempel $f(x) = x^{1/2}$. Definierar $y = f(x) = x^{1/2}$ som den entydigt bestämda lösningen $\bar{y} \geq 0$ till $y^2 = x$ (eller $g(y) = y^2 - x = 0$). Har sett att sådan lösning finns för $x = 2$. Analogt för andra rationella $x \geq 0$. Entydigheten följer av att $g(y) = y^2$ är *strängt växande* med växande $y \geq 0$, dvs $0 \leq y_1 < y_2 \Leftrightarrow g(y_1) = y_1^2 < y_2^2 = g(y_2)$, dvs två olika y-värden ≥ 0 kan ej ha samma kvadrat.

Funktioner m.m.

Implikationen följer av att

$$y_2^2 - y_1^2 = \underbrace{(y_2 + y_1)}_{>0}\underbrace{(y_2 - y_1)}_{>0} > 0,$$

för $0 \leq y_1 < y_2$



Funktioner m.m.

För allmänt $r = p/q$, $p, q > 0$ definieras $y = x^r = x^{p/q}$ som lösningen $\bar{y} > 0$ till

$$y^q = x^p.$$

Detta definierar $f(x) = x^r : Q_+ \to R_+$ vilken sedan kan utvidgas till $f(x) = x^r : R_+ \to R_+$ genom

$$f(\bar{x}) = \lim_{j \to \infty} f(x_j)$$

som tidigare!

Funktioner m.m.

Potenslagarna: Har för $x > 0$, $y > 0$ och rationella $r = p/q$ och $u = s/t$ (som för heltalspotenser) att

- $x^r\, x^u = x^{r+u}$
- $x^r\, y^r = (x\, y)^r$
- $(x^r)^u = x^{r\, u}$

Funktioner m.m.

Bevis av potenslagarna:

$$x^r\, y^r = (xy)^r$$

Sätt $v = x^r = x^{p/q}$ och $w = y^r = y^{p/q}$, dvs $v^q = x^p$ och $w^q = y^p$. Ledvis multiplikation ger att

$$\underbrace{v^q\, w^q}_{=(v\,w)^q} = \underbrace{x^p\, y^p}_{=(x\,y)^p},$$

dvs

$$v\,w = (x\,y)^{\frac{p}{q}} = (x\,y)^r,$$

QED.

Funktioner m.m.

Bevis av potenslagarna:

$$(x^r)^u = x^{r\,u}.$$

Sätt $v = x^r$ och $w = v^u$, dvs $v^q = x^p$ och $w^t = v^s$. Härav

$$w^{q\,t} = (w^t)^q = (v^s)^q = v^{s\,q} = (v^q)^s = (x^p)^s = x^{p\,s},$$

dvs

$$w = x^{\frac{p\,s}{q\,t}} = x^{r\,u},$$

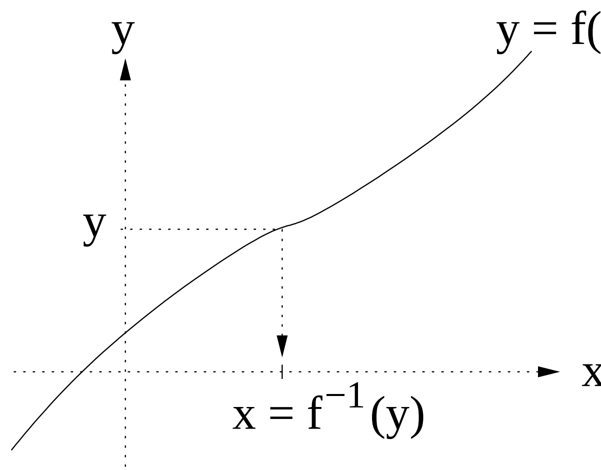
QED.

Övning: Bevisa den återstående potenslagen.

Funktioner m.m.

Invers funktion

Om till varje y finns ett entydigt bestämt x sådant att $f(x) = y$ så betecknas detta x även $f^{-1}(y)$, dvs om x entydigt bestäms ax y på detta sätt kan kan x ses som värdet av en *funktion* av y betecknad $f^{-1}(y)$, dvs $x = f^{-1}(y)$.



Funktioner m.m.

När funkar fixpunktsiteration?

Låt g vara en *kontraktion*, dvs en funktion sådan att

$$|g(a) - g(b)| \leq L|a - b|$$

för alla a och b, för något $L < 1$.

Söker $\bar{x}$ sådant att $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

Genererar *följd*

$$x_0, x_1, x_2, .., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, .., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..$$

sådan att $g(x_k) =: x_{k+1}$. Visar att följden är en *Cauchy följd*.

Funktioner m.m.

Har att

$$|x_j - x_{j+1}| = |g(x_{j-1}) - g(x_j)| \leq L|x_{j-1} - x_j|$$

$$\leq L(L|x_{j-2} - x_{j-1}|) \leq .. \leq L^j|x_0 - x_1|.$$

Analogt

$$|x_{j+1} - x_{j+2}| \leq L^{j+1}|x_0 - x_1|,$$

o.s.v. Dvs

$$|x_j - x_i| \leq |x_j - x_{j+1}| + |x_{j+1} - x_{j+2}| + .. + |x_{i-1} - x_i|$$

$$\leq (L^j + L^{j+1} + .. + L^{i-1})|x_0 - x_1| = \frac{L^j - L^i}{1 - L}|x_0 - x_1| \leq \frac{L^j}{1 - L}|x_0 - x_1|.$$

Funktioner m.m.

Alltså är följden $\{x_j\}$ konvergent med ett *gränsvärde* $\bar{x}$.

Återstår att visa att $g(\bar{x}) = \bar{x}$. Men

$$g(\bar{x}) = g(\lim x_j) = \lim g(x_j) = \lim x_{j+1} = \bar{x}.$$

QED

Funktioner m.m.

Kan det finnas flera fixpunkter?

Nej, ty antag att både a och b är fixpunkter, dvs att $g(a) = a$ och $g(b) = b$. Då

$$|a - b| = |g(a) - g(b)| \leq L|a - b|,$$

vilket endast är möjligt om $a = b$ ty $L < 1$. Dvs det kan inte finnas två (olika) fixpunkter!

Funktioner m.m.

Har nu bevisat följande:
En kontraktion $g : R \to R$ har en entydigt bestämd fixpunkt $\bar{x}$, vilken kan beräknas med iterationsmetoden $g(x_j) =: x_{j+1}$.

Funktioner m.m.

Resultatet kan generaliseras till det fall g är en kontraktion på ett givet intervall $[a, b]$, dvs avbildar alla x i $[a, b]$ på $g(x)$-värden i samma intervall, och sådan att g är Lipschitzkontinuerlig med $L < 1$ på intervallet. Då finns ett entydigt bestämt $\bar{x}$ i intervallet sådant att $g(\bar{x}) = \bar{x}$.