Matematik Chalmers

Tentamen i TMA196 Analys och linjär algebra K Kf Kb, del B, 2002–04–06 f V

Telefon: Georgios Foufas, 0740–459022
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. 20 poäng krävs fö godkänt. Uppgifterna 1–2 är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar. På uppgifterna 3–5 skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Obs att frågorna är formulerade så att man ofta kan svara på en delfråga även om man inte lyckats med de föregående.

1. (a) Formulera integralkalkylens fundamentalsats.

(b) Formulera och bevisa formeln för partiell integration.

(c) Använd partiell integration för att beräkna $\displaystyle\int_0^x y^3 \exp(-y^2)\, dy$. Tips: $\displaystyle\frac{d}{dy}e^{-y^2} = ...$

(d) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\, dx$. (Tips: $z = 1 + x^2$.)

(e) Ange Taylors polynom av grad 3 för funktionen $\exp(x)$ i punkten $\bar{x} = 0$.

2. (a) Programmet `my_ode.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [t,u]=my_ode(f,int,ua,h)
% my_ode - solves the initial value problem for a general system of
%          ordinary differential equations u'=f(t,u)
%   Syntax:
%           [t,u]=my_ode(f,int,ua,h)
%   Arguments:
%           f   - string containing the name of a function file
%           int - 1x2 matrix specifying a time interval int=[a,b]
%           ua  - dx1 matrix specifying an initial value
%           h   - positive number, the stepsize
%   Returns:
%           t - nx1 matrix containg the time points with t(1)=a
%           u - nxd matrix containing the approximate solution
%   Description:
%           The program computes an approximate solution of the intial
%           value problem  u'=f(t,u), a<t<b; u(a)=ua.  Here u, f,
%           and ua are column vectors of dimension d.  The file f.m
%           must contain the function f(t,u) with syntax uprime=f(t,u).
%           The program returns the nx1 matrix t of time points with
%           t(1)=a and the nxd matrix u with row number i containing
%           the transposed solution vector at time t(i).
%           The program uses the Euler forward method.
```

Skriv den funktionsfil och de Matlab-kommandon som behövs för att lösa och plotta lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$u'(t) = -3u(t), \quad 0 < t < 2,$$
$$u(0) = 5.$$

Bestäm lösningen analytiskt. Rita dess graf.

Vänd!

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) + 9u(t) = 0,$$
$$u(0) = 1, \; u'(0) = 1.$$

(c) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$u'(t) = -u(t)^3,$$
$$u(0) = u_0.$$

(d) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad \text{med } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}.$$

(e) Skriv en halv sida om ditt tillämpningsprojekt.

---

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Vad menas med värderummet $R(A)$ till A?

(b) Lös ekvationerna $Ax = b$ och $Ax = c$.

(c) Tillhör b och c värderummet $R(A)$?

(d) Ange en bas till $R(A)$ och bestäm värderummets dimension. Bestäm matrisens rang (p engelska "rank").

4. (a) Låt $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definieras av

$$f(x) = \begin{bmatrix} -2(x_1 - 1) + x_2 e^{x_1} \\ -2x_2 - x_2 e^{x_1} \end{bmatrix}.$$

Lös (analytiskt) ekvationen $f(x) = 0$.

(b) Beräkna Jacobimatrisen $f'(x)$.

(c) Genomför första steget i Newtons metod för ekvationen $f(x) = 0$ med startvektor $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. (a) Beskriv hur vi definierar (konstruerar) logaritmfunktionen $\log(x)$.

(b) Räkna upp logaritmens viktigaste egenskaper. Ange dess definitionsmängd och värdemängd.

(c) Använd definitionen för att bevisa någon av logaritmens egenskaper.

(d) Använd definitionen för att bevisa den grova uppskattningen $1 < \log(4) < 2$.

/stig