TMA196 Analys och linjär algebra K Kf Kb, del B, 2002–08–27. Lösningar.

---

1. (a) Se boken.

(b) Partiell integration: $\displaystyle\int_a^b uv'\,dx = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$. Bevis, se boken.

(c) Partiell integration:

$$\begin{aligned}\int_0^x y^2\sin(y)\,dy &= -\Big[y^2\cos(y)\Big]_0^x + \int_0^x 2y\cos(y)\,dy\\ &= -x^2\cos(x) + \Big[2y\sin(y)\Big]_0^x - 2\int_0^x \sin(y)\,dy\\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\Big[\cos(y)\Big]_0^x\\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2.\end{aligned}$$

(d) Variabelsubstitution:

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^3}x^2\,dx = \begin{Bmatrix} z = 1+x^3\\ dz = 3x^2\,dx\end{Bmatrix} = \frac13\int_1^9 \frac1z\,dz = \frac13\Big[\log(z)\Big]_1^9 = \frac13\log(9).$$

(e) Taylors polynom är: $P(x) = 1-\frac12x^2+\frac1{24}x^4$. Taylors formel är: $\cos(x) = 1-\frac12x^2+\frac1{24}x^4+R_5(x,0)$, $R_5(x,0) = \frac1{6!}\cos(\hat{x})x^6$, där $\hat{x}$ ligger mellan x och 0.

2. (a) Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(t,x)
y=[0, 1; -4 0]*x;
```

Vi skriver följande på MATLABs kommandorad:

```
>>    [t,u]=my_ode('funk', [0, 2], [5;0], .01); plot(t,u)
```

Lösningen är: $u(t) = 5\cos(2t)$.

(b) $u(t) = \cosh(3t) + \frac13\sinh(3t) = \frac23e^{3t} + \frac13e^{-3t}$.

(c) Differentialekvationen är separabel:

$$\begin{aligned}-\frac{du}{u^2} &= t\\ \int_{u_0}^{u(T)} \frac{-1}{u^2}\,du &= \int_0^T t\,dt\\ \left[\frac{-1}{u}\right]_{u_0}^{u(T)} &= \frac12T^2\\ \frac{1}{u(T)} &= \frac{1}{u_0} - \frac12T^2\\ u(T) &= \frac{u_0}{1-\frac12T^2u_0}\\ u(t) &= \frac{u_0}{1-\frac12t^2u_0}\end{aligned}$$

(d) Multiplicera med den integrerande faktorn e^{at}:

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{at}u(t)\Big) = e^{at}u' + ae^{at}u = e^{at}b.$$

Integrera:

$$
\begin{aligned}
\Big[e^{at}u(t)\Big]_0^T &= \int_0^T e^{at} b\,dt \\
e^{aT}u(T) - u(0) &= \frac{e^{aT}-1}{a} b \\
u(T) &= u_0 e^{-aT} + \frac{1-e^{-aT}}{a} b \\
u(t) &= u_0 e^{-at} + \frac{1-e^{-at}}{a} b
\end{aligned}
$$

3. (a) $R(A)$ är mängden av alla lösningar till ekvationen $Ax = 0$, dvs

$$N(A) = \{x \in \mathbf{R}^4 : Ax = 0\}.$$

(b) Vi har

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

Gauss eliminationsmetod leder till en trappstegsmatris:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet $Ax = 0$ är alltså ekvivalent med systemet $\hat{A}x = 0$, dvs

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\
x_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

med lösningarna $x_4 = s$, $x_3 = 0$, $x_2 = -2x_3 - 3x_4 = -3s$, $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2s$, där s är godtycklig, dvs

$$x = \begin{bmatrix} 2s \\ -3s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Vektorn $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bildar en bas för $N(A)$ och dess dimension är 1.

(d) Gauss eliminationsmetod leder till den ekvivalenta matrisen $\hat{A}$. Räknereglerna för determinant ger att $\det(A) = c\det(\hat{A})$, där c är produkten av alla utbrutna konstanter. Men $\det(\hat{A})$ är lika med produkten av diagonalelementen i $\hat{A}$. I vårt fall blir därför $\det(A) = 0$.

4. (a) Ekvationen $f(x) = 0$ betyder

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 &= 0, \\
-x_1 + x_2 - x_2x_3 + x_1x_2x_3 &= 0 \\
x_2 + x_3 - x_1^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Den första ekvationen ger $x_1\big(1+x_2^2+x_3^2\big)=0$, dvs $x_1=0$. De andra ekvationerna ger sedan $x_2=x_3=0$ eller $x_3=-x_2=1$. Det finns alltså två lösningar $\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ och $\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$.

(b) Jacobimatrisen är

$$f'(x)=\begin{bmatrix}1+x_2^2+x_3^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3\\ -1+x_2x_3 & 1-x_3+x_1x_3 & -x_2+x_1x_2\\ -2x_1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

(c) Första steget i Newtons metod:

$$\text{evaluera:}\quad A=f'(x^{(0)})=f'(1,0,0)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&1&1\end{bmatrix},$$

$$b=-f(x^{(0)})=-f(1,0,0)=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\text{lös ekvationssystemet } Ah=b:\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow h^{(0)}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix},$$

$$\text{uppdatera:}\quad x^{(1)}=x^{(0)}+h^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

Det andra steget blir:

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow h^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$x^{(2)}=x^{(1)}+h^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

vi har hittat den ena lösningen.

5. Se boken.

`/stig`