Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2002–12–19 f V

Telefon: Erik Broman 0740 459022 (Stig Larsson 0733 409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar. För godkänt krävs minst 16 poäng från denna avdelning.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum i början av januari.

1. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{1+4x^2}\,dx$.

2. Lös begynnelsevärdesproblemet (se uppgift 1!) $\begin{cases} u'(x) = (1+4x^2)^{-1}, & x \in [0,3], \\ u(0) = 1. \end{cases}$

3. Beskriv hur man löser problemet i uppgift 2 med de MATLAB-program som du skrivit under kursen.

4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 x\sin(x)\,dx$.

5. Ange Taylors polynom av grad 3 för funktionen $\log(1+x)$ i punkten $\bar{x} = 0$.

6. Programmet `my_ode.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
% my_ode - solves initial value problem for general system of
%          ordinary differential equations u'=f(t,u), a<t<b; u(a)=ua.
%   Syntax:
%           [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
%   Arguments:
%           f   - string containing the name of a function file
%           int - 1x2 matrix specifying a time interval int=[a,b]
%           ua  - dx1 matrix specifying an initial value
%           h   - positive number, the stepsize
%   Returns:
%           t - nx1 matrix containg the time points with t(1)=a
%           U - nxd matrix containing the approximate solution
```

Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(t,x)
A=[0 1;-1 0];
y=A*x;
```

Vi skriver följande på MATLABs kommandorad:

```
>> [t,U]=my_ode('funk', [0, 6], [0;1], .01); plot(t,U)
```

Vilket begynnelsevärdesproblem löser vi? Uttryck lösningen analytiskt. Rita vad man ser i figuren.

Vänd!

7. Lös begynnelsevärdesproblemet (b är en konstant) $\begin{cases} u'(t) + 3u(t) = b, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

8. Skissa grafen till lösningen till uppgift 7 för $b = 0$ och $b = 5$ och diverse värden på u_0.

9. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t) = u(t)^2, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

10. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = 0, \\ u(0) = 1, \ u'(0) = 0. \end{cases}$

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Lös ekvationssystemet $Ax = b$.

(b) Bestäm en bas för värderummet $R(A)$.

(c) Uttryck b som en linjär kombination av denna bas.

(d) Beräkna $\det(A)$. Är A singulär?

(e) Visa att funktionen $f(x) = Ax$ är en linjär funktion av typen $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$.

12. (a) Visa hur man skriver om differentialekvationen $u'' = -\sin(u) - (u')^2$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ som ett system av två ekvationer av första ordningen:

$$\begin{cases} w' = f(w), \\ w(0) = w_0, \end{cases} \qquad \text{med } f(w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ -\sin(w_1) - w_2^2 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet $f(w) = 0$.

(c) Beräkna Jacobi-matrisen $f'(w)$. Beräkna linjäriseringen av f i punkten $\bar{w} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Genomför ett steg av Newtons metod för $f(w) = 0$ med startvektor $\bar{w} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$.

13. Betrakta det allmänna begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \\ u(a) = u_a. \end{cases}$$

(a) Skriv ned Eulers metod för approximativ beräkning av lösningen.

(b) Skriv ned mittpunktsmetoden för approximativ beräkning av lösningen.

(c) Mittpunktsmetoden kallas "implicit". Vad menas med detta? Hur kan man implementera denna metod i MATLAB?

/stig