Matematik Chalmers

**TMA035 Analys och linjär algebra Kf Kb, del B, 2003–08–26 f V**

Telefon: Tobias Gebäck 0740 459022 (examinator Stig Larsson 0733 409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

---

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar. För godkänt krävs minst 16 poäng från denna avdelning.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

**1.** Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{1+4x^2}\,dx$.

**2.** Lös begynnelsevärdesproblemet (se uppgift 1!) $\begin{cases} u'(x) = (1+4x^2)^{-1}, & x \in [0,3], \\ u(0) = 1. \end{cases}$

**3.** Formulera integralkalkylens fundamentalsats.

**4.** Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 x\sin(x)\,dx$.

**5.** Ange Taylors polynom av grad 3 för funktionen $\log(1+x)$ i punkten $\bar{x} = 0$.

**6.** Programmet `my_int.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [x,U]=my_int(f,I,ua,h)
% my_int - solves the initial value problem u'(x)=f(x), u(a)=ua
%
%   Syntax:
%           [x,U]=my_int(f,I,ua,h)
%   Arguments:
%           f   - string containing the name of a function file,
%                 for example, f='funk'
%           I   - 1x2 matrix, specifying an interval I=[a b]
%           ua  - real number, the  initial value
%           h   - positive number, the stepsize
%   Returns:
%           x -  a vector, the set of nodes x(i)
%           U -  a vector, U(i) is the approximate solution at
%                the point x(i)
%   Description:
%           The program computes an approximate solution of the initial
%           value problem  u'(x)=f(x), a<x<b; u(a)=ua, according to
%           the algorithm in the Fundamental Theorem of Calculus.
```

Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(s)
y=1/s;
```

Vi skriver följande på MATLABs kommandorad:

```
>> [t,U]=my_int('funk', [1, 6], 0, .01); plot(t,U)
```

Vilket begynnelsevärdesproblem löser vi? Uttryck lösningen analytiskt. Rita vad man ser i figuren.

Vänd!

**7.** Lös begynnelsevärdesproblemet ($b$ är en konstant) $\begin{cases} u'(t) + 3u(t) = b, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

**8.** Skissa grafen till lösningen till uppgift 7 för $b = 0$ och $b = 5$ och diverse värden på $u_0$.

**9.** Skriv ned det begynnelsevärdesproblem som definierar funktionen $\exp(x)$.

**10.** Skriv ned det begynnelsevärdesproblem som definierar funktionen $\cos(x)$.

---

**11.** (a) Vad menas med att tre vektorer $a, b, c$ är linjärt oberoende?

(b) Undersök om vektorerna

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är linjärt oberoende.

(c) Kan man uttrycka $c$ som en linjär kombination av $a$ och $b$?

(d) Bestäm en bas för nollrummet till matrisen $A = [a, b, c]$.

**12.** (a) Visa hur man skriver om differentialekvationen $u'' = u^3 - u - (u')^2$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ som ett system av två ekvationer av första ordningen:

$$\begin{cases} w' = f(w), \\ w(0) = w_0, \end{cases} \qquad \text{med } f(w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_1^3 - w_1 - w_2^2 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet $f(w) = 0$.

(c) Beräkna Jacobi-matrisen $f'(w)$. Beräkna linjäriseringen av $f$ i punkten $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) Genomför ett steg av Newtons metod för $f(w) = 0$ med startvektor $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

**13.** En kemisk reaktion sägs vara av ordning 3 om reaktionshastigheten ges av

$$u'(t) = -ku^3(t),$$

där $u(t)$ är det reagerande ämnets koncentration vid tiden $t$ och $k$ en positiv konstant.

(a) Bestäm en formel för koncentrationen som funktion av tiden $t$ och begynnelsekoncentrationen $u_0$. Bestäm halveringstiden.

(b) Skriv ned Eulers metod för approximativ beräkning av lösningen.

(c) Beskriv hur man löser denna ekvation med det MATLAB-program som du skrivit under kursen.

/stig