TMA740B Analys i en variabel Kf Kb, del B, 1999.
Facit till övningstentor.

Tenta 1.

1. (a)

$$\int_0^x (t^3+t)e^{-t^2}\,dt = \left\{\begin{matrix} s=t^2 \\ ds=2t\,dt \end{matrix}\right\} = \int_0^{x^2} (s+1)e^{-s}\,ds = \{\text{partiell integration}\} = -(\tfrac{1}{2}x^2+1)e^{-x^2}+1$$

(b) 0, ty integranden är en udda funktion och integrationsintervallet är symmetriskt.
(c) $L_f \le 1$

2. (a) $\arctan(x) = x + R_2(x)$, $R_2(x) = -2\dfrac{1-3\hat{x}^2}{(1+\hat{x}^2)^3}\dfrac{x^3}{6}$, där $\hat{x}$ ligger mellan 0 och x.

(b) $|R_2(x)| = \frac{1}{3}\dfrac{|1-3\hat{x}^2|}{(1+\hat{x}^2)^3}|x|^3 \le \frac{2}{3}|x|^3$ för $-1 \le x \le 1$, ty $|1-3\hat{x}^2| \le 2$ och $(1+\hat{x}^2)^3 \ge 1$.
(c) $\arctan(0.1) \approx 0.1$ med felet $|R_2(0.1)| \le \frac{2}{3}0.1^3 < 10^{-3}$.
3. $u(t) = \frac{1}{2}u_1 e^{-2t}\sin(2t)$. $|u(t)| = \frac{1}{2}|u_1||e^{-2t}||\sin(2t)| \le \frac{1}{2}|u_1|$ för $t \ge 0$.
Sätt $x_1 = u$, $x_2 = u'$. Då fås

$$x' = Ax,\ x(0) = x_0; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

Framåt Euler:

$$\begin{aligned} &U(0) = x_0, \\ &U(t_i) = U(t_{i-1}) + h_i A U(t_{i-1}) = (I + h_i A)U(t_{i-1}). \end{aligned}$$

Tenta 2.

1. (a) $\frac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ för $-1 < x < 1$.
(b) $|f(x)| = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} \le \frac{4}{3}x \le \frac{2}{3}$ för $0 \le x \le \frac{1}{2}$, ty $1-t^2 \ge \frac{3}{4}$ för $0 \le t \le \frac{1}{2}$. Samma resultat fås för $-\frac{1}{2} \le x \le 0$, ty $f(-x) = -f(x)$.

2. (a) $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_3(x)$, $R_3(x) = \cos(\hat{x})\dfrac{x^4}{24}$, där $\hat{x}$ ligger mellan 0 och x.
(b) $R_3(x) = g(x)x^4$ med $|g(x)| = \frac{1}{24}|\cos(\hat{x})| \le \frac{1}{24}$.
(c) $\cos(0.1) \approx 1 - \frac{1}{2}0.1^2 = 0.995$ med felet $|R_3(0.01)| \le \frac{1}{24}0.1^4 < 10^{-5}$.
(d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+g(x)x^4)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2 - g(x)x^4}{x} = \lim_{x\to 0}(\tfrac{1}{2}x - g(x)x^3) = 0$$

Intressantare gränsvärde:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+g(x)x^4)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2 - g(x)x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0}(\tfrac{1}{2} - g(x)x^2) = \tfrac{1}{2}$$

3. (a) $u(x) = \dfrac{u_0}{\sqrt{1-2xu_0^2}}$ för $0 \le x < 1/(2u_0^2)$.
(b) Framåt Euler: $U(0) = u_0$, $U(x_i) = U(x_{i-1}) + h_i U(x_{i-1})^3$.

4. (a) $u'' + u = 0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. (b) Se kap 30. Detta är "trigonometriska ettan": $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(c) Man skriver det som ett system av första ordningen: $v_1 = u$, $v_2 = u'$ och

$$v' = Av,\ v(0) = v_0; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sedan använder man en numerisk metod, t ex, framåt Euler:

$$\begin{aligned} &U(0) = v_0, \\ &U(t_i) = U(t_{i-1}) + h_i A U(t_{i-1}) = (I + h_i A) U(t_{i-1}). \end{aligned}$$

5. (a)

för $k = 0, 1, 2, \ldots$

evaluera $A = Df(v^{(k)})$ och $b = -f(v^{(k)})$

lös ekvationssystemet $Ah = b$

uppdatera $v^{(k+1)} = v^{(k)} + h$

end

(b)

$$\begin{bmatrix} \dot{v_1} \\ \dot{v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -\sin(v_1) \end{bmatrix}, \quad \dot{v} = F(v), \quad F(v) = \begin{bmatrix} F_1(v) \\ F_2(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -\sin(v_1) \end{bmatrix}.$$

$F(v) = 0$ ger $v_2 = 0$, $v_1 = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(c)

$$DF(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(v)}{\partial v_1} & \frac{\partial F_1(v)}{\partial v_2} \\ \frac{\partial F_2(v)}{\partial v_1} & \frac{\partial F_2(v)}{\partial v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(v_1) & 0 \end{bmatrix}$$

Första steget i Newtons metod:

evaluera $A = DF(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ och $b = -F(0,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

lös ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

uppdatera $v^{(1)} = v^{(0)} + h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

mitt i prick!

`1999-12-07 /stig`