

## RÄKNEUPPGIFTER, LÄSVECKA 1.

### Vektorrummet av linjära funktioner på ett intervall.

1. Låt  $\lambda_a(x) = \frac{b-x}{b-a}$  och  $\lambda_b(x) = \frac{x-a}{b-a}$ . Visa att

$$\lambda_a(x) + \lambda_b(x) = 1; \quad a\lambda_a(x) + b\lambda_b(x) = x.$$

Ge en geometrisk tolkning genom att rita  $\lambda_a(x)$ ,  $\lambda_b(x)$ ,  $\lambda_a(x) + \lambda_b(x)$ ,  $a\lambda_a(x)$ ,  $b\lambda_b(x)$ ,  $a\lambda_a(x) + b\lambda_b(x)$  i samma figur.

### Vektorrummet av styckvis linjära, kontinuerliga funktioner på ett intervall.

2. Låt  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = 1$ , där  $x_1 = 1/6$  och  $x_2 = 1/2$ , vara en indelning av intervallet  $[0, 1]$  i tre delintervall.

a) Bestäm analytiska uttryck för "hattfunktionerna"  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  i  $V_h$  (rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på denna indelning). Rita också en figur.

- b) Vilken är dimensionen av  $V_h$ ?
- c) Rita mesh-funktionen  $h(x)$ .

### Linjär interpolation.

3. Låt  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en Lipschitzkontinuerlig funktion. Bestäm den linjära interpolanten  $\pi f \in \mathcal{P}(0, 1)$  och rita  $f$  och  $\pi f$  i samma figur, då

- a)  $f(x) = x^2$ ,
- b)  $f(x) = \sin(\pi x)$ .

### Styckvis linjär, kontinuerlig interpolation.

4. Låt  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en Lipschitzkontinuerlig funktion. Bestäm den styckvis linjära, kontinuerliga interpolanten  $\pi_h f \in V_h$ , med  $h(x)$  och  $V_h$  som i Uppgift 2, och rita  $f$  och  $\pi_h f$  i samma figur, då

- a)  $f(x) = x^2$ ,
- b)  $f(x) = \sin(\pi x)$ .

Är det en lämplig indelning vi har valt för att approximera dessa funktioner? Kan du tänka ut en bättre i fall a) respektive b) om kravet är att det skall vara tre delintervall?

### Interpolationsfel.

5. Låt  $h(x)$  vara mesh-funktionen i Uppgift 2. Beräkna  $\|f - \pi_h f\|_{L_\infty(0, 1)}$  samt  $\frac{1}{8} \|h^2 f''\|_{L_\infty(0, 1)}$ , då

- a)  $f(x) = x^2$ ,
- b)  $f(x) = \sin(\pi x)$ .

Tips: För att beräkna  $\|f - \pi_h f\|_{L_\infty(0, 1)}$  behöver du maximera funktionen  $g(x) = |f(x) - \pi_h f(x)|$  på varje delintervall och ta ut det största av dessa tre maxima. Du kan kontrollera dina svar genom att också göra beräkningarna i *Piecewise Polynomial Lab*.

Om du tror du kommit på bättre indelningar i slutet på Uppgift 4, så gör om beräkningarna för dessa. Utnyttja gärna *Piecewise Polynomial Lab*!