Differentialekvationer
&
tekniska beräkningar
del b

Kenneth Eriksson
http://www.math.chalmers.se/ kenneth

Repetition

Ett modellproblem:
Låt Ω vara ett givet (begränsat) *område* i rummet, dvs R^3, eller planet R^2, med *rand* $\Gamma = \partial\Omega$, med given

- *värmekapacitivitet* $c = c(x)$,
- *konduktivitet* $a = a(x)$, och
- *värmeproduktion* $f = f(x,t)$

i Ω.

Söker

- *temperaturen* $u = u(x,t)$ och
- *värmeflödet* $q = -a\,\nabla u$

i Ω, bestämda av:

Repetition

begynnelsevillkoret $u = u_0$ vid $t = 0$, *differentialekvationen*

$$c\,\dot{u} = f - \nabla\cdot q, \quad \text{i } \Omega,$$

och *randvillkoret*

$$-a\,\partial_n u = \gamma\,(u - g_D) + g_N, \quad \text{på } \Gamma,$$

för $t > 0$, där $\partial_n u = \nabla u \cdot n$ & n yttre enhetsnormal till Γ, dvs

- $-a\,\partial_n u = -a\,\nabla u\cdot n$ är *värmeutflödet*,
- g_D är *omgivningstemperaturen* (utanför Γ),
- γ "*randkonduktivitet*", och
- g_N ett givet *värmeutflöde*.

Repetition

Differentialekvationen $c\,\dot{u} = f - \nabla\cdot q$ uttrycker accumulation av skillnaden mellan producerad värme och utflödad värme, och kan skrivas

$$c\,\dot{u} - \nabla\cdot a\,\nabla u = f.$$

Typiska *enheter* för c, a och f är J/(m^3 K), W/(m K) resp. W/m^3.
T.ex. gäller för vatten $c = 4.18e6$ och $a = 0.6$.

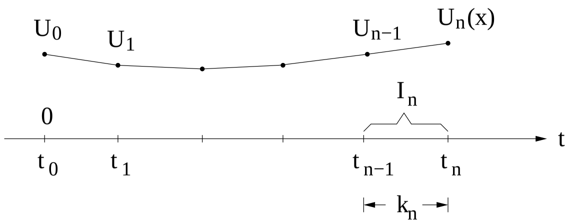
I specialfallet $c = 1$, $a = 1$ erhålls

$$\dot{u} - \Delta u = f,$$

där $\Delta = \nabla\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{d}(\frac{\partial}{\partial x_i})^2$ är *Laplace operatorn*.

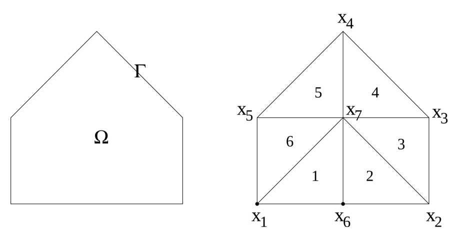
Repetition

För *tidsdiskretisering* av problemet införs



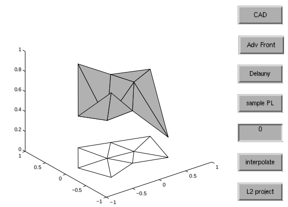
Repetition

För *rumsdiskretisering* m.h.a. *finita element* görs en *triangulering* av Ω:



Repetition

Vi *ansätter* sedan en *styckvis linjär* (approximativ) lösning $U_n(x)$ av typen:

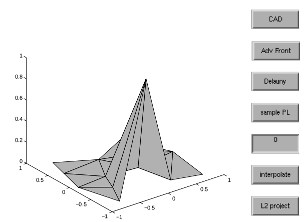


Repetition

Vi noterar att $U_n(x)$ kan representeras m.h.a. *basfunktionerna* $\phi_j(x)$ och (sökta) *nodvärden* $U_{n,j} = U_n(x_j)$ enligt formeln

$$U_n(x) = \sum_{j=1}^{m} U_{n,j}\phi_j(x),$$

med $\phi_j(x)$ enligt figur:



Repetition

Basfunktionerna $\phi_j(x)$ är alltså själva styckvis linjära på den valda trianguleringen, och karaktäriseras av att $\phi_j(x_j) = 1$ och $\phi_j(x_i) = 0$ för $i \neq j$.

Repetition

För att kunna bestämma lämpliga nodvärden $U_{n,j}$ så att ansatsen $U_n(x)$ (approximativt) löser den givna differentialekvationen

$$\dot{u} - \nabla \cdot a \nabla u = f,$$

skriver vi densamma på s.k. *svag form*, eller *variationsform*, dvs multiplicerar ekv med s.k. testfunktioner $v = v(x,t)$ och integrerar i rum och tid över Ω och det aktuella tidsintervallet I_n. Detta ger

$$\int_{I_n} \int_\Omega v\, \dot{u} + \int_{I_n} \int_\Omega v\,(-\nabla \cdot a\, \nabla u) = \int_{I_n} \int_\Omega v\, f.$$

Repetition

Erinrar oss att

$$\int_\Omega v\,(-\nabla \cdot a\, \nabla u) = \int_\Gamma v\,(\underbrace{-a\,\partial_n u}_{=\gamma\,(u-g_D)+g_N}) + \int_\Omega \nabla v \cdot a\, \nabla u,$$

vilket ger

$$\int_{I_n} \int_\Omega v\,\dot{u} + \int_{I_n} \int_\Omega \nabla v \cdot a\, \nabla u + \int_{I_n} \int_\Gamma v\,\gamma\, u = \int_{I_n} \int_\Omega v\, f + \int_{I_n} \int_\Gamma v\, g,$$

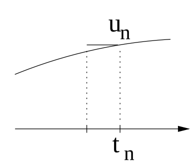
där $g = \gamma\, g_D - g_N$.

Repetition

För $v = v(x)$ och $\gamma = \gamma(x)$ (dvs t-oberoende) fås

$$\int_\Omega v \underbrace{\int_{I_n} \dot{u}}_{=u_n - u_{n-1}} + \int_\Omega \nabla v \cdot a\, \nabla \underbrace{\int_{I_n} u}_{\approx k_n u_n} + \int_\Gamma \gamma\, v \underbrace{\int_{I_n} u}_{\approx k_n u_n} = \int_\Omega v \int_{I_n} f + \int_\Gamma v \int_{I_n} g,$$

där $u_n = u(x,\, t_n)$.



Repetition

Med ledning härav söker vi U_n som ovan sådan att

$$\int_\Omega v\,U_n + k_n \int_\Omega \nabla v \cdot a\,\nabla U_n + k_n \int_\Gamma v\,\gamma\,U_n = \int_\Omega v\,U_{n-1} + \int_\Omega v\,\int_{I_n} f + \int_\Gamma v\,\int_{I_n} g,$$

för $v = \phi_i$, $i = 1, .., m$, vilket ger m ekvationer för de m nodvärdena $U_{n,j}$ i ansatsen $U_n = U_n(x)$.

Repetition

Vi börjar med att beräkna

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi_i\,U_n &= \int_\Omega \phi_i\,(U_{n,1}\phi_1 + U_{n,2}\phi_2 + .. + U_{n,m}\phi_m) \\
&= \int_\Omega U_{n,1}\phi_i\,\phi_1 + U_{n,2}\phi_i\,\phi_2 + .. + U_{n,m}\phi_i\,\phi_m \\
&= U_{n,1}\underbrace{\int_\Omega \phi_i\,\phi_1}_{M_{i1}} + U_{n,2}\underbrace{\int_\Omega \phi_i\,\phi_2}_{M_{i2}} + .. + U_{n,m}\underbrace{\int_\Omega \phi_i\,\phi_m}_{M_{im}} \\
&= M_{i1}\,U_{n,1} + M_{i2}\,U_{n,2} + .. + M_{im}\,U_{n,m},
\end{aligned}$$

motsvarande komponent i i $M U_n$, där M är *massmatrisen* med element M_{ij} och U_n är (kolonn)vektorn med nodvärdena $U_{n,j}$.

Notera: U_n uppenbarar sig i två skepnader, som funktion och som kolonnvektor !!!

Repetition

Analogt beräknas

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla\phi_i \cdot a\,\nabla U_n \\
&= \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot a\,\nabla(U_{n,1}\phi_1 + U_{n,2}\phi_2 + .. + U_{n,m}\phi_m) \\
&= \int_\Omega U_{n,1}\nabla\phi_i \cdot a\nabla\phi_1 + U_{n,2}\nabla\phi_i \cdot a\,\nabla\phi_2 + .. + U_{n,m}\nabla\phi_i \cdot a\,\nabla\phi_m \\
&= U_{n,1}\underbrace{\int_\Omega a\,\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_1}_{A_{i1}} + U_{n,2}\underbrace{\int_\Omega a\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_2}_{A_{i2}} + .. + U_{n,m}\underbrace{\int_\Omega a\,\nabla\phi_i \cdot \nabla}_{A_{im}} \\
&= A_{i1}\,U_{n,1} + A_{i2}\,U_{n,2} + .. + A_{im}\,U_{n,m},
\end{aligned}$$

motsvarande komponent i i vektorn $A\,U_n$, där A är *diffusionsmatrisen* med element A_{ij}, och

Repetition

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \gamma\,\phi_i\,U_n &= \int_\Gamma \gamma\,\phi_i\,(U_{n,1}\phi_1 + U_{n,2}\phi_2 + .. + U_{n,m}\phi_m) \\
&= U_{n,1}\underbrace{\int_\Gamma \gamma\,\phi_i\,\phi_1}_{K_{i1}} + U_{n,2}\underbrace{\int_\Gamma \gamma\,\phi_i\,\phi_2}_{K_{i2}} + .. + U_{n,m}\underbrace{\int_\Gamma \gamma\,\phi_i\,\phi_m}_{K_{im}} \\
&= K_{i1}\,U_{n,1} + K_{i2}\,U_{n,2} + .. + K_{im}\,U_{n,m}.
\end{aligned}$$

Repetition

Slutligen beräknas högerledsvektorerna F_n och G_n med komponenter

$$\int_\Omega \phi_i \int_{I_n} f = F_{n,i},$$

och

$$\int_\Gamma \phi_i \int_{I_n} g = G_{n,i}.$$

Repetition

Givet dessa matriser och vektorer kan ekvationssystemet för U_n nu skrivas

$$MU_n + k_nAU_n + k_nKU_n = MU_{n-1} + F_n + G_n,$$

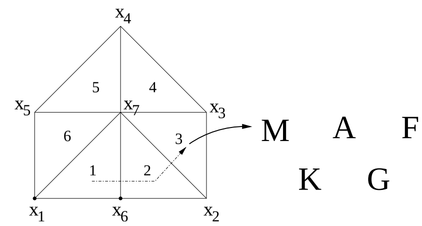
eller

$$\underbrace{(M + k_nA + k_nK)}_{C_n}U_n = b_n,$$

med lösning $U_n = C_n^{-1}b_n$.

Repetition

Innan vi kan beräkna lösningen U_n måste vi alltså forma/beräkna de ingående matriserna M, A och K, och vektorerna F och G. Detta moment kallas *assemblering*, och organiseras ofta så att de olika elementen "besöks" ett i taget, varvid dess "lokala" bidrag beräknas och succesivt adderas på avsedd plats i de "globala" matriserna.



Repetition

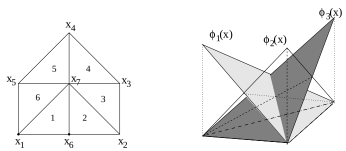
I vårt exempel bidrar t.ex. element nummer ett till kopplingar mellan noderna 1, 6 och 7, dvs till elementen i raderna och kolonnerna med samma nummer i de globala matriserna M och A, liksom till kolonnerna med samma nummer i vektorn F.
Analogt besöks de olika randelementen varvid deras respektive bidrag till matrisen K och vektorn G beräknas.

Repetition

T.ex. beräknar vi på element 1 att $\nabla\phi_1 = (-2,\,0)$, $\nabla\phi_2 = (2,\,-2)$ och $\nabla\phi_3 = (0,\,2)$. Arean av elementet är $1/8$. Detta ger den *lokala styvhets/diffusionsmatrisen*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

vars bidrag adderas i raderna och kolonnerna 1, 6 och 7 i matrisen A.



Repetition

Efter att bidragen från elementen 1 och 2 inkommit har matrisen A fått följande innehåll:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogt beräknas *massmatrisen* M och *lastvektorn* $F = F_n$.

Repetition

Matrisen K och "*randlastvektorn*" $G = G_n$ får sina bidrag från de olika randelementen. T.ex. beräknas för randelementet mellan nod x_1 och nod x_6, om vi för enkelhets skull antar att $\gamma = 1$, en lokalt bidrag till K på formen

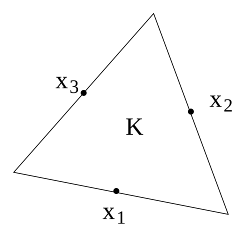
$$\begin{bmatrix} \int \phi_1\,\phi_1 & \int \phi_1\,\phi_2 \\ \int \phi_2\,\phi_1 & \int \phi_2\,\phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\,h & \frac{1}{6}\,h \\ \frac{1}{6}\,h & \frac{1}{3}\,h \end{bmatrix}$$

där $h = 1/2$ (och där talen $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{6}$ kanske känns igen), och bidragen i denna matris adderas till de fyra positionerna (1,1), (1,6), (6,1) och (6,6) i matrisen K.

Analogt beräknas de två bidragen till lastvektorn $G = G_n$ från elementet.

Repetition

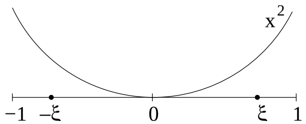
Vi erinrar oss att i allmänhet beräknas alla lokala elementmatriser och elementlastvektorer mha lämplig *numerisk "kvadratur"*, t.ex. "kantmittpunktskvadratur" för triangelelementen:



$\int_K f(x)\,dx \sim (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))\,dK / 3$

Repetition

och 2-punkts Gausskvadratur för randelementen:



$$2/3 = (-\xi)^2 + \xi^2 \qquad \xi = 1/\sqrt{3}$$

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \sim f(-\xi h)\,h + f(\xi h)\,h$$

Repetition

Var är vi, och vart är vi på väg?:

$$-u'' = f$$

$$\dot{u} + a\,u = f \qquad\qquad -\Delta u + u = f$$

$$\dot{u} - \Delta u + u = f$$

$$\dot{u} + b\cdot\nabla u - \Delta u = f \;\leftarrow\; \dot{u} - \Delta u = f(u) \;\rightarrow\; \begin{array}{l} -\Delta u = f(u) \\ -\Delta u = \lambda u \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{u} + u\cdot\nabla u - \Delta u = f \\ \nabla\cdot u = 0 \end{array}\right. \leftarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{u}_1 - \Delta u_1 = f_1(u) \\ \dot{u}_2 - \Delta u_2 = f_2(u) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{u} - v = 0 \\ \dot{v} - \Delta u = f \end{array}\right.$$