Beskrivning

Del 1 - Värmeledning

Utgå från funktionerna och koden i Projekt 1.

I fallet Poisson, $-(au')' = f$, fick vi ett linjärt ekvationssystem i ξ att lösa:

$$(A+R)\xi = b + r$$
$$U = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \phi_j(x)$$

I fallet värmeledning, $\dot{u} - (au')' = f$, får vi ett ODE-system i ξ:

$$M\dot{\xi} + (A+R)\xi = b + r$$
$$U = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \phi_j(x)$$

där M är en massmatris som beräknas på ett liknande sätt som styvhetsmatrisen A i MyFirstPoissonAssembler.m (OBS! sätt faktorn c(x), definierad i c.m till 1, på samma sätt som a(x)), och R och r är matrisen respektive vektorn som representerar Robinvillkoren.

Givet ett begynnelsetillstånd ξ_0 (vilket ju definierar U_0), så kan vi lösa ODE-systemet med någon tidsstegningsmetod.

Vi ersätter koden där vi löser ekvationssystemet i MyFirstPoissonSolver.m med en stegning över ett givet tidsintervall:

```
k = 0.01;
t = 0;
T = 10;

%Definiera U0, i det här fallet 0 överallt
U0 = zeros(length(p), 1);

U = U0;

i = 2;
while(t < T)
  U(:, i) = ???

  t = t + k;
  i = i + 1;
end
```

Implementera en sådan lösare för värmeledning med framåt (explicit) Euler, bakåt (implicit) Euler samt Crank-Nicholson som tidsstegningsalgoritmer.

Lös sedan problemet:

$$\dot{u} - u'' = sin(x),\ x \in [0, \pi]$$
$$u(0) = u(\pi) = 0$$
$$u_0 = 0$$

med de tre olika tidsstegningsalgoritmerna på ett rumsnät med 10 noder.

Som referens ska lösningen konvergera till motsvarande icke-tidsberoende Poisson-problem.

Framåt Euler är villkorligt stabil medan de två andra är villkorslöst stabila.

Undersök detta genom att variera tidssteget k (prova med 0.1, 0.01 och 0.001 t.ex.), och jämföra resultatet av framåt Euler och bakåt Euler.

Fixera nu k vid ett värde som ger stabilt resultat för framåt Euler. Variera nu rumssteget h och jämför framåt och bakåt Euler. Prova även en icke-uniform diskretisering i rummet med både stora och små steg.

Slutligen, lös problemet med ett “spik”-begynnelsevärde, dvs. 0 överallt utom i en punkt, och observera vad som händer (välj en godtycklig tidsstegningsmetod).

Not: För Dirichletvillkor sätter vi γ till något stort tal. Det introducerar en styvhet i systemet som kan ligga utanför stabilitetsregionen för framåt Euler. Sätt γ till ett lägre tal, 100 t.ex., för att undvika att det dominerar.

Del 2 - Vågrörelse

Utgå ifrån funktionerna och koden för värmeledning.

Istället för värmeledning, implementera en lösare för vågrörelse, $\ddot{u} - u'' = f$.

På samma sätt som för värmeledning får vi ett ODE-system:

$$M\ddot{\xi} + (A + R)\xi = b + r$$

$$U = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \phi_j(x)$$

Lös sedan ett vågproblem med de tre olika tidsstegningsalgoritmerna.

Om magnituden på pulsen kan ses som energin i systemet, vad händer med energin med de tre olika algoritmerna?

Ett simpelt problem är:

$$\ddot{u} - u'' = 0,\ x \in [0, 1]$$
$$u'(0) = u'(1) = 0$$

På ett nät med 2 noder, där $u_0(0) = -1$ och $u_0(1) = 1$.