Blandade problem Tillämpad Matematik Kb2 ht-00

.

1. (Karolin special (R))
Antag att f är en jämn funktion. Visa att

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\xi x)\,dx.$$

2. Använd resultatet i uppgift 1. för att beräkna

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\cos x\,dx.$$

3. Antag att f är udda med period 2π och att

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2\,dx = 1.$$

a) Visa att

$$\int_0^{\pi} |f'(x)|^2\,dx \geq 1$$

b) Det finns en funktion f för vilken likhet inträffar, vilken? (Ledning: Studera en lämplig Fourierutveckling).

4. Betrakta funktionen f som är definierad på IR, har perioden 2π och definieras som $f(x) = x^2$ för $-\pi \leq x \leq \pi$.

a) Rita grafen till f för $-3\pi \leq t \leq 3\pi$.

b) Bestäm f's Fourierserie.

c) Använd resultatet i b) för att beräkna värdet av summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5. Funktionen f är periodisk med period 4. Vidare gäller att

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0, & 1 < |t| < 2. \end{cases}$$

Utveckla f i en trigonometrisk Fourierserie.
Använd sedan detta för att beräkna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

samt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

6. Funktionen f har Fouriertransformen

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^3 + 1}.$$

Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * f')(t)|^2 \, dt.$$

7. a) Låt $h(x) = \delta^{(n)}(x)$, n ett positivt heltal. Beräkna h's Fouriertransform $\hat{h}(\omega)$.

b) Låt $f(x) = \theta(x + \frac{\pi}{2}) - \theta(x - \frac{\pi}{2})$. Visa att $|\hat{f}(\omega)| \leq \pi$.

8. En tunn tråd av längd L satisfierar värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_{xx} = k u_t, \quad 0 < x < L, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

a) Bestäm $u = u(x,t)$.

b) Visa att $u(x,t) \to L/2$ då $t \to \infty$.

9. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + 20u = 0, \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \\ u(0,y) = 0, \ u(1,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, \ u(x,1) = x^2 - x. \end{cases}$$

10. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = x, \ 0 < x < 1, \ -\infty < y < \infty, \\ u_x(0, y) = 0, \\ u(1, y) = ye^{-|y|}. \end{cases}$$

11. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = e^{x - x^2}, \ x \in I\!R. \end{cases}$$