Lösningar Tillämpad Matematik TMA990 Kb2 001216

.

1. Se tex Jan Petersson.

2. Laplacetransformering ger (notera att $\delta(t-1) \supset e^{-s}$)

$$s^2Y + 3sY + 2Y = e^{-s}.$$

Vi löser ut Y och får $Y = F(s)e^{-s}$ där

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Inverstransformering av $F(s)$ med hjälp av L14 ger

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Således (L5)

$$y(t) = (e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)})\theta(t-1).$$

3. Variabelseparation $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger

$$XT' = X''T + aXT \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} - a = \lambda.$$

Egenvärdesproblemet i X med homogena randdata har icke-triviala lösningar för $\lambda < 0$. $\lambda = 0$ ger egenvärdesproblemet $X'' = 0$ som bara har lösning $X = 0$ med homogena randdata. För $\lambda < 0$ sätter vi $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ och får problemet $X'' + \alpha^2 X = 0$ som har lösningarna (se Emmas kokbok)

$$A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x).$$

Användning av randdata ger egenlösningarna

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \quad \text{med} \quad \lambda_n = -n^2.$$

Ekvationen för T ges av $T' = (\lambda + a)T$ med lösningar

$$T_n(t) = c_n e^{-(n^2-a)t}.$$

Allmän lösning

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n^2-a)t} \sin(nx).$$

Begynnelsedata ger nu c_n. Insättning

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = \pi x.$$

Således fås normeringsfaktor

$$M_n = \int_0^{\pi} \sin^2(nx) dx = \frac{\pi}{2}$$

och Fourierkoefficienter

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi x \sin(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

Det ger oss lösningen

$$u(x,t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-(n^2-a)t} \sin(nx).$$

Vi noterar att $u(x,t) \to 0$ då $t \to \infty$ ifall $n^2 - a > 0$. $n \geq 1$ betyder att $n^2 \geq 1$ varvid villkoret uppfylls då $a < 1$.