Lösningar Tillämpad Matematik TMA990 Kb2 011221

.

1. Laplacetransformering ger

$$s^2Y - s + 3sY - 3 + 2Y = s.$$

Vi löser ut Y och får

$$Y(s) = \frac{2s+3}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}.$$

Inverstransformering ger

$$y(t) = e^{-t} + e^{-2t},\ t > 0.$$

2. (a) Entydigheten hos Fouriertransformen ger

$$\hat{f}_n(\omega) = \begin{cases} \frac{2\pi\sqrt{\omega}}{(1+\omega^2)^2},\ 0 \le \omega \le n, \\ 0,\ \text{annars.} \end{cases}$$

(b) Plancherel's sats ger

$$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n(\omega)|^2\, d\omega.$$

Enligt (a) har vi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^n \frac{4\pi^2\omega}{(1+\omega^2)^4}\, d\omega.$$

Variabelbyte $z = \omega^2$ ger

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^n \frac{4\pi^2\omega}{(1+\omega^2)^4}\, d\omega = \pi\int_0^{n^2} \frac{dz}{(1+z)^4} = \frac{\pi}{3}(1 - \frac{1}{(1+n^2)^3}).$$

Vi ser att $E_n < \pi/3$ samt att $E_n \to \pi/3$ då $n \to \infty$.

3. Variabelseparation $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger

$$XT'' = X''T - aXT' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} + a\frac{T'}{T} = \lambda.$$

Egenvärdesproblemet i X med homogena randdata har icke-triviala lösningar för $\lambda < 0$. $\lambda = 0$ ger egenvärdesproblemet $X'' = 0$ som bara har lösning $X = 0$ med homogena randdata. För $\lambda < 0$ sätter vi $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ och får problemet $X'' + \alpha^2 X = 0$ som har lösningarna (se Emmas kokbok)

$$A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x).$$

Användning av randdata ger egenlösningarna

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \quad \text{med} \ \ \lambda_n = -n^2.$$

Ekvationen för T ges av

$$T_n''(t) + aT_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0,$$

med allmän lösning

$$T_n(t) = a_n e^{k_n t} + b_n e^{-k_n t},\ k_n = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - n^2}..$$

Allmän lösning för u ges av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{k_n t} + b_n e^{-k_n t} \right) \sin(nx).$$

Begynnelsedata ger nu

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \sin(nx) = \pi x.$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n (a_n - b_n) \sin(nx) = 0.$$

Vi får att $a_n = b_n$, varvid

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = \pi x/2.$$

Således fås normeringsfaktor

$$M_n = \int_0^{\pi} \sin^2(nx)dx = \frac{\pi}{2}$$

och Fourierkoefficienter

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi x}{2} \sin(nx)dx = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

Det ger oss lösningen

$$u(x,t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (e^{k_n t} + e^{-k_n t}) \sin(nx).$$

(a) Fallet $a = 0$ ger

$$u(x,t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (e^{int} + e^{-int}) \sin(nx) =$$

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(nt) \sin(nx).$$

(b) Fallet $a = 2$ ger

$$u(x,t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-t} \cos(\sqrt{n^2-1}t) \sin(nx).$$

Vi noterar att $u(x,t) \to 0$ då $t \to \infty$.