TMA990 Tillämpad matematik, Kb2
Inlämningsuppgift

En kort men tydlig rapport med lösningar till teoriuppgifterna samt resonemang och lämpliga plottar till datoruppgifterna ska lämnas in **senast onsdag i läsvecka 7**. Inlämningsuppgiften är obligatorisk för att få godkänt på kursen, den kommer dock inte att betygsättas.

1 Samplingsteoremet

Vi betraktar ett tidsförlopp som beskrivs av funktionen $f = f(t)$ med Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$. Vidare har vi samplat detta förlopp med samplingstiden T_s så att vi har en sekvens av funktionsvärden

$$f_n = f(nT_s), \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Den högsta frekvens vi kan se kommer då att vara Nyquist-frekvensen $\nu_N = \frac{1}{2T_s}$. Vår diskreta sekvens $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ kan vi representera som en kontinuerlig signal genom att skriva

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - nT_s) \qquad (2)\\ &= f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\\ &= f(t)s_{T_s}(t)\end{aligned}$$

Uppgift 1: Serieutveckla impulståget $s_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ i en komplex Fourierserie.

Uppgift 2: Visa att $f(t)s_{T_s}(t)$ har Fouriertransformen

$$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega). \tag{3}$$

Vi kallar en funktion bandbegränsad med bandbredden α om

$$\hat{f}(\omega) = 0, \quad \text{för } |\omega| \geq \alpha. \tag{4}$$

Om så inte är fallet kan vi skapa en bandbegränsad funktion genom att filtrera bort högfrekvent innehåll från signalen. Filtrerar vi bort alla frekvenser högre än α kallar vi denna operation LP_α-filtrering (för Low Pass). Detta kan vi uttrycka matematiskt genom att vi multiplicerar på transformsidan med funktionen

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \alpha \\ 0, & |\omega| \geq \alpha \end{cases}$$

Vi kan nu formulera samplingsteoremet:

Sats 1.1 *Antag att f är kontinuerlig och bandbegränsad med bandbredden α. Om f samplas med frekvensen $\nu = \frac{1}{T_s} \geq \frac{\alpha}{\pi}$ kan f rekonstrueras fullständigt från den samplade sekvensen $f(nT_s)$ genom en LP_α-filtrering och en multiplikation med T_s, dvs*

$$f(t) = T_s LP_\alpha(f(t)s_{T_s}(t)). \tag{5}$$

Bevis. Vi har att den samplade sekvensen kan skrivas $f(t)s_{T_s}(t)$ och att den har Fouriertransformen

$$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega). \tag{6}$$

En lågpass LP_α-filtrering ges av multiplikation på transformsidan med funktionen $\hat{h}(\omega)$, vi får alltså

$$T_s LP_\alpha(f(t)s_{T_s}(t)) \supset \hat{h}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega). \tag{7}$$

Då vi har att $\Omega = \frac{2\pi}{T_s} \geq \alpha$ blir endast termen för $n = 0$ kvar av summan, dvs

$$\hat{h}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega), \tag{8}$$

där sista likheten följer av antagandet att $f(t)$ är bandbegränsad. Följaktligen blir

$$T_s LP_\alpha(f(t)s_{T_s}(t)) = f(t) \tag{9}$$

$\square$

Uppgift 3: Visa att man kan skriva signalen som

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \frac{T_s \sin(\alpha(t - nT_s))}{\pi(t - nT_s)}. \tag{10}$$

2 Diskret Fouriertransform

Vi ska nu definiera den diskreta motsvarigheten till Fouriertransformen. Låt oss anta att $f(t) = 0$ för $t \neq [0, T]$ och definiera

$$a_n = f(nT_s), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \tag{11}$$

med $N = \frac{T}{T_s}$ stort. Den diskreta Fouriertransformen kan då definieras som

$$\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-j2\pi nm/N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \tag{12}$$

där j betecknar den imaginära enheten, $j = \sqrt{-1}$.

Vi kan motivera denna definition genom att tänka oss att vi utgår från den kontinuerliga Fouriertransformen:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{NT_s} f(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{13}$$

Byter vi till frekvens $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ och beräknar integralen m.h.a. vänsterpunktskvadratur så fås,

$$\hat{f}(\nu) = \int_{0}^{NT_s} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-j2\pi\nu nT_s} T_s. \tag{14}$$

Med f samplad i tiderna nT_s blir Nyquist-frekvensen $\nu_N = \frac{1}{2T_s}$ och avståndet $\Delta\nu$ mellan frekvensvärden blir $\frac{2\nu_N}{N} = \frac{1}{NT_s}$[1], vilket ger

$$\hat{f}(m\Delta\nu) \approx T_s \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-j2\pi \frac{m}{NT_s} nT_s} = T_s \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-j2\pi mn/N}. \tag{15}$$

Detta är, bortsett från faktorn T_s, samma uttryck som definierade den diskreta Fouriertransformen ovan. Jämför också med studioövning 2.

Den inversa diskreta transformen definieras som

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_m e^{j2\pi nm/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \tag{16}$$

[1] Alternativt kan vi använda samplingsteoremet applicerat på $\hat{f}(\omega)$ som ju är "bandbegränsad" då $f(t) = 0$ för $t \neq [0, T]$. $\Delta\nu$ fås då genom att sätta $\alpha = T/2 = nT_s/2$.

Tillämpningsuppgift 1: Som vi såg ovan så innebär en filtreringsoperation enbart en multiplikation på frekvenssidan med en avskärningsfunktion $\hat{h}(\omega)$. Proceduren när vi jobbar i Matlab blir ännu enklare; det räcker med att sätta lämpliga värden i den transformerade vektorn till noll.

Skapa en tidsvektor och en samplad sekvens av A-dur ackordet på samma sätt som i demonstrationsexemplet på hemsidan:

```
>> Ts = 1/11025;
>> fn = 1/(2*Ts);
>> t=-.5:Ts:2.5;
>> freq = linspace(-fn,fn,length(t));
>> a1=sin(440*t*2*pi);
>> ciss2=sin(550*t*2*pi);
>> e2=sin(660*t*2*pi);
>> a2=sin(880*t*2*pi);
>> A=.15*a1+.15*ciss2+.15*e2+.15*a2;
>> env=(40*t.*exp(-20*t)+.5*exp(-(t-.2).^2)).*(t>=0);
>> AA=A.*env;
```

Uppgiften blir nu att m.h.a. Matlabs `fft` och `ifft` filtrera bort den högsta tonen i ackordet!

Tips! Matlabs `find` *kan vara användbar.*

Tillämpningsuppgift 2: Läs igenom Exempel 5, pp 4:14-15 i boken som handlar om AM-radio. Tänk dig att du har en radio som sänder och mottar signalen med bärfrekvensen 4 kHz. Arbeta (i Matlab) igenom exemplet där du skickar och avkodar A-dur ackordet för den här tänkta radion.

Tillämpningsuppgift 3: I denna uppgiften handlar det om att använda `fft` för att numeriskt lösa värmeledningsekvationen. Vi studerar

$$\dot{u}(x,t) - u''(x,t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{17}$$

$$u(x,t=0) = u_0(x). \tag{18}$$

Hitta på en begynnelsevärdesfunktion $u_0(x)$ och lös ekvationen genom att utföra en diskret transformation i x-led, lösa den ordinära differentialekvationen (analytiskt), tidsstega (m.h.a. den analytiska lösningen) och sedan inverstransformera!