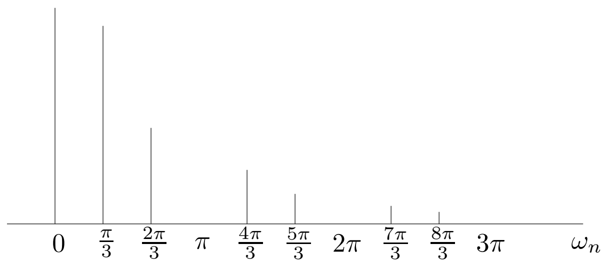
1.

$$
\begin{aligned}
&T = 6,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3} \\
&b_n = 0, \quad \text{ty } f \text{ är jämn} \\
&a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\cos\frac{n\pi t}{3}\,dt \\
&\quad = \frac{2}{3}\int_0^1 \cos\frac{n\pi t}{3}\,dt = \frac{2}{3}\left[\frac{\sin\frac{n\pi t}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} \\
&a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 dt = \frac{2}{3} \\
&f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\Big) \\
&\quad = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi t}{3} \\
&\quad = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\cos\frac{\pi t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\cos\frac{2\pi t}{3} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\cos\frac{4\pi t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{5\pi}\cos\frac{5\pi t}{3} \\
&\qquad + 0 + \frac{\sqrt{3}}{7\pi}\cos\frac{7\pi t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\cos\frac{8\pi t}{3} + 0 + \cdots
\end{aligned}
$$

Amplitudspektrum:



2.

(DE)	$\frac{1}{\kappa}u'_t = u''_{xx}$
(RV)	$u(0,t) = u(1,t) = 0$
(BV)	$u(x,0) = 1$

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\Big(1-(-1)^n\Big)\exp(-n^2\pi^2\kappa t)\sin(n\pi x)
$$

3. (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 1 = 0$ med rötterna $r = \pm 1$. Den allmänna lösningen blir

$$
\begin{aligned}
u(t) &= Ae^t + Be^{-t} = C\cosh(t) + D\sinh(t), \quad C = A + B,\ D = A - B, \\
u'(t) &= Ae^t - Be^{-t} = C\sinh(t) + D\cosh(t).
\end{aligned}
$$

Begynnelsevillkoren ger

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(0) = C, \\
u_1 &= u'(0) = D,
\end{aligned}
$$

dvs $C = u_0$, $D = u_1$ (eller $A = \frac{1}{2}(u_0 + u_1)$, $B = \frac{1}{2}(u_0 - u_1)$). Alltså:

$$u(t) = u_0 \cosh(t) + u_1 \sinh(t) = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_1)e^t + \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1)e^{-t}.$$

(b) Laplacetransformering ger

$$s^2 U(s) - su_0 - u_1 - U(s) = 0,$$

dvs

$$U(s) = \frac{su_0 + u_1}{s^2 - 1}.$$

Med partialbråksuppdelning får vi

$$U(s) = \frac{su_0 + u_1}{s^2 - 1} = \frac{su_0 + u_1}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} = \frac{As + A + Bs - B}{(s-1)(s+1)}$$

Identifiering av koefficienterna ger $su_0+u_1 = As+A+Bs-B$, dvs $A = \frac{1}{2}(u_0+u_1)$, $B = \frac{1}{2}(u_0-u_1)$). Alltså:

$$U(s) = \frac{su_0 + u_1}{s^2 - 1} = \frac{1}{2}\frac{u_0 + u_1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{u_0 - u_1}{s+1} \supset \tfrac{1}{2}(u_0 + u_1)e^t + \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1)e^{-t} = u(t).$$

(c) Med $x_1 = u$, $x_2 = u'$ får vi

$$\begin{aligned} x_1' &= u' = x_2, \\ x_2' &= u'' = u = x_1, \end{aligned}$$

dvs, på matrisform,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ och egenvektorer $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Lösningen blir

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} g_1 + Be^{\lambda_2 t} g_2 = Ae^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + Be^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = x(0) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

dvs $A = \frac{1}{2}(u_0 + u_1)$, $B = \frac{1}{2}(u_0 - u_1)$. Alltså:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{2}(u_0 + u_1)e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1)e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_0 \cosh(t) + u_1 \sinh(t) \\ u_0 \sinh(t) + u_1 \cosh(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function xprime=funk(t,x)
xprime=[0 1; 1 0]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandona

```
>> u0=1; u1=2; x0=[u0; u1]; T=5;
>> [t,x]=ode45('funk',[0;T],x0);
```

(e) Det linjära systemet har egenvärdena ± 1, dvs ett av dem är positivt. Det betyder att systemet är instabilt.

4. Den första ekvationen divideras med $q_f c_f$, den andra med $\rho c_p q_f T_f$. Med $\tau = V/q_f$ får vi

$$\tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{q}{q_f}\frac{c_f - c}{c_f} - \frac{c}{c_f}\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big),$$
$$\tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) = \frac{q}{q_f}\frac{T_f - T}{T_f} + \frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_p T_f}\frac{c}{c_f}\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big) - \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}\Big(\frac{T - T_f}{T_f} - \frac{T_K - T_f}{T_f}\Big).$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$\begin{aligned}
s &= t/\tau,\\
X_1(s) &= \frac{c_f - c(s\tau)}{c_f}, \quad X_2(s) = \frac{T(s\tau) - T_f}{T_f},\\
U_1(s) &= \frac{q(s\tau)}{q_f}, \quad U_2(s) = \frac{T_K(s\tau) - T_f}{T_f},\\
\alpha &= \frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_p T_f}, \quad \beta = \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}, \quad \gamma = \frac{E}{RT_f}, \quad \delta = \tau k_0 e^{-\gamma}, \quad f(x) = \delta e^{\gamma x/(1+x)},
\end{aligned}$$

får vi

$$\frac{c}{c_f} = 1 - X_1, \quad \frac{T}{T_f} = X_2 - 1, \quad \tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = -\frac{dX_1}{ds}, \quad \tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) = \frac{dX_2}{ds},$$

$$\begin{aligned}
\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big) &= \tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\Big)\exp\Big(\frac{E}{RT_f} - \frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T - T_f + T_f}\Big)\\
&= \delta \exp\Big(\gamma - \frac{\gamma}{X_2 + 1}\Big) = \delta \exp\Big(\gamma \frac{X_2}{X_2 + 1}\Big) = f(X_2).
\end{aligned}$$

Detta leder till det ickelinjära differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned}
\frac{dX_1}{ds} &= -U_1 X_1 + (1 - X_1) f(X_2) && (\ = F_1(X,U)\ ),\\
\frac{dX_2}{ds} &= -U_1 X_2 + \alpha(1 - X_1) f(X_2) - \beta(X_2 - U_2) && (\ = F_2(X,U)\ ).
\end{aligned}$$

(b) Nu linjäriserar vi kring $\bar{X}, \bar{U}$. Det linjäriserade systemet blir

$$x'(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad s > 0; \quad x(0) = x_0,$$

med Jacobimatriserna

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(\bar{X},\bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(\bar{X},\bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(\bar{X},\bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(\bar{X},\bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{U}_1 - f(\bar{X}_2) & (1 - \bar{X}_1) f'(\bar{X}_2) \\ -\alpha f(\bar{X}_2) & -\bar{U}_1 + \alpha(1 - \bar{X}_1) f'(\bar{X}_2) - \beta \end{bmatrix},$$

där

$$f'(x) = \frac{\gamma}{(1 + x)^2} f(x),$$

och

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1}(\bar{X},\bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial U_2}(\bar{X},\bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1}(\bar{X},\bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial U_2}(\bar{X},\bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{X}_1 & 0 \\ -\bar{X}_2 & \beta \end{bmatrix}.$$

(c) Lösningar $x(t)$ till det linjäriserade ekvationssystemet är approximationer till störningar av jämviktsläget, $X(t) \approx \bar{X} + x(t)$. Genom att undersöka lösningarna till det linjäriserade systemet får man information om stabiliteten hos små störningar av jämviktsläget. Ett stabilitetsvillkor: systemet är asymptotiskt stabilt (dvs alla störningar går mot noll då $t \to \infty$) om och endast om alla egenvärden λ till Jacobimatrisen A har negativ realdel. Eftersom A är osymmetrisk kan dock $x(t)$ bli stor innan den går mot noll, dvs systemet kan vara instabilt trots att det är asymptotiskt stabilt. Detta kan man undersöka t ex genom att beräkna lösningar numeriskt till det linjäriserade och det ickelinjära systemet.

/stig