TMV040 Tillämpad matematik K, 2003–03–24. Lösningar.

1.

$$
\begin{aligned}
&T = 6,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}\\
&a_n = 0, \quad \text{ty } f \text{ är udda}\\
&b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\Omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\Omega t\,dt = \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\cos\frac{n\pi t}{3}\,dt\\
&\quad = \frac{2}{3}\int_0^1 \sin\frac{n\pi t}{3}\,dt = \frac{2}{3}\left[\frac{-\cos\frac{n\pi t}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{3}\Big)\\
&f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\Big)\\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{3}\Big)\sin\frac{n\pi t}{3}\\
&\quad = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi t}{3} + \frac{3}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{3} + \frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi t}{3} + \frac{3}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{3}\\
&\qquad + \frac{1}{5\pi}\sin\frac{5\pi t}{3} + 0 + \frac{1}{7\pi}\sin\frac{7\pi t}{3} + \cdots
\end{aligned}
$$

Amplituderna är: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = b_n$, eftersom $b_n \geq 0$. Alltså:

$$A_1 = \frac{1}{\pi},\ A_2 = \frac{3}{2\pi},\ A_3 = \frac{4}{3\pi},\ A_4 = \frac{3}{4\pi},\ A_5 = \frac{1}{5\pi},\ A_6 = 0,\ A_7 = \frac{1}{7\pi}.$$

2.

(DE) $\quad \frac{1}{\kappa}u_t' = u_{xx}''$

(RV) $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0$

(BV) $\quad u(x,0) = 1$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\Big(1-(-1)^n\Big)\exp(-n^2\pi^2\kappa t)\sin(n\pi x)$$

3. (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 3r + 2 = 0$ med rötterna $r_1 = -1$, $r_2 = -2$. Den allmänna lösningen blir

$$
\begin{aligned}
u(t) &= Ae^{-t} + Be^{-2t}\\
u'(t) &= -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}.
\end{aligned}
$$

Begynnelsevillkoren ger

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(0) = A + B,\\
u_1 &= u'(0) = -A - 2B,
\end{aligned}
$$

dvs $A = 2u_0 + u_1$, $B = -(u_0 + u_1)$. Alltså:

$$u(t) = (2u_0 + u_1)e^{-t} - (u_0 + u_1)e^{-2t}.$$

(b) Laplacetransformering ger

$$s^2U(s) - su_0 - u_1 + 3(sU(s) - u_0) + 2U(s) = 0,$$

dvs

$$U(s) = \frac{(s+3)u_0 + u_1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Med partialbråksuppdelning får vi

$$U(s) = \frac{(s+3)u_0 + u_1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{As + 2A + Bs + B}{(s+1)(s+2)}$$

Identifiering av koefficienterna ger $(s+3)u_0 + u_1 = As + 2A + Bs + B$, dvs $A = 2u_0 + u_1$, $B = -(u_0 + u_1)$. Alltså:

$$U(s) = (2u_0 + u_1)\frac{1}{s+1} - (u_0 + u_1)\frac{1}{s+2} \supset (2u_0 + u_1)e^{-t} - (u_0 + u_1)e^{-2t} = u(t).$$

(c) Med $x_1 = u$, $x_2 = u'$ får vi

$$\begin{aligned} x_1' &= u' = x_2, \\ x_2' &= u'' = -2x_1 - 3x_2, \end{aligned}$$

dvs, på matrisform,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$ och egenvektorer $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Lösningen blir

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t}g_1 + Be^{\lambda_2 t}g_2 = Ae^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + Be^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = x(0) = A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

dvs $A = 2u_0 + u_1$, $B = -(u_0 + u_1)$. Alltså:

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} = (2u_0 + u_1)e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - (u_0 + u_1)e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function xprime=funk(t,x)
xprime=[0 1; -2 -3]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandona

```
>> u0=1; u1=2; x0=[u0; u1]; T=5;
>> [t,x]=ode45('funk',[0;T],x0);
```

(e) Det linjära systemet har egenvärdena -1 och -2, dvs båda är negativa. Det betyder att systemet är asymptotiskt stabilt.

4. Den första ekvationen divideras med $q_f c_f$, den andra med $\rho c_p q_f T_f$. Med $\tau = V/q_f$ får vi

$$\begin{aligned} \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) &= \frac{q}{q_f}\frac{c_f - c}{c_f} - \frac{c}{c_f}\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big), \\ \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) &= \frac{q}{q_f}\frac{T_f - T}{T_f} + \frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_p T_f}\frac{c}{c_f}\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big) - \frac{\kappa A\tau}{\rho c_p V}\Big(\frac{T - T_f}{T_f} - \frac{T_K - T_f}{T_f}\Big). \end{aligned}$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$
\begin{aligned}
&s = t/\tau,\\
&X_1(s) = \frac{c(s\tau)}{c_f}, \quad X_2(s) = \frac{T(s\tau)}{T_f},\\
&U_1(s) = \frac{q(s\tau)}{q_f}, \quad U_2(s) = \frac{T_K(s\tau)}{T_f},\\
&\alpha = \frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_p T_f}, \quad \beta = \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}, \quad \gamma = \frac{E}{RT_f}, \quad \delta = \tau k_0 e^{-\gamma}, \quad f(X_2) = \delta \exp(\gamma - \gamma/X_2),
\end{aligned}
$$

får vi

$$
\begin{aligned}
&\frac{c}{c_f} = X_1, \quad \frac{T}{T_f} = X_2, \quad \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{dX_1}{ds}, \quad \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) = \frac{dX_2}{ds},\\
&\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big) = \tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\Big)\exp\Big(\frac{E}{RT_f} - \frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big)\\
&\quad = \delta \exp\Big(\gamma - \frac{\gamma}{X_2}\Big) = f(X_2).
\end{aligned}
$$

Detta leder till det ickelinjära differentialekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
\frac{dX_1}{ds} &= U_1(1 - X_1) - X_1 f(X_2) && (\ = F_1(X,U)\ ),\\
\frac{dX_2}{ds} &= U_1(1 - X_2) + \alpha X_1 f(X_2) - \beta(X_2 - U_2) && (\ = F_2(X,U)\ ).
\end{aligned}
$$

(b) Stationära punkter ges av

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{U}_1(1 - \bar{X}_1) - \bar{X}_1 f(\bar{X}_2),\\
0 &= \bar{U}_1(1 - \bar{X}_2) + \alpha \bar{X}_1 f(\bar{X}_2) - \beta(\bar{X}_2 - \bar{U}_2).
\end{aligned}
$$

Vi löser ut styrvariablerna

$$
\begin{aligned}
\bar{U}_1 &= \frac{\bar{X}_1}{1 - \bar{X}_1} f(\bar{X}_2),\\
\bar{U}_2 &= \bar{X}_2 - \frac{1}{\beta}\Big(\frac{\bar{X}_1}{1 - \bar{X}_1}(1 - \bar{X}_2) f(\bar{X}_2) + \alpha \bar{X}_1 f(\bar{X}_2)\Big).
\end{aligned}
$$

Med $\alpha = 0.3$, $\gamma = 30$, $\delta = 0.1$ och $\bar{X}_1 = 0.5$, $\bar{X}_2 = 1$ får vi $f(1) = 0.1$ och $f'(1) = 3$, $\alpha f(1) = 0.03 \approx 0$. Dvs

$$
\begin{aligned}
\bar{U}_1 &= 0.1,\\
\bar{U}_2 &= 1 - \frac{0.015}{\beta}.
\end{aligned}
$$

(c) Nu linjäriserar vi kring $\bar{X}, \bar{U}$. Det linjäriserade systemet blir

$$
x'(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad s > 0; \quad x(0) = x_0,
$$

med Jacobimatriserna

$$
A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(\bar{X}, \bar{U}) \\[2ex] \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(\bar{X}, \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{U}_1 - f(\bar{X}_2) & -\bar{X}_1 f'(\bar{X}_2) \\[2ex] \alpha f(\bar{X}_2) & -\bar{U}_1 + \alpha \bar{X}_1 f'(\bar{X}_2) - \beta \end{bmatrix},
$$

där $f'(\bar{X}_2) = \dfrac{\gamma}{\bar{X}_2^2} f(\bar{X}_2)$, och

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial U_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \dfrac{\partial F_1}{\partial U_2}(\bar{X}, \bar{U}) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial U_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \dfrac{\partial F_2}{\partial U_2}(\bar{X}, \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \bar{X}_1 & 0 \\ \\ 1 - \bar{X}_2 & \beta \end{bmatrix}.$$

Vi sätter in siffervärden i A,

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & -1.5 \\ 0.03 & 0.35 - \beta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.2 & -1.5 \\ 0 & 0.35 - \beta \end{bmatrix}$$

Den sista matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = -0.2$ och $\lambda_2 = 0.35 - \beta$. De är båda negativa, och det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt, om $\beta > 0.35$. Det betyder fysikaliskt att kylarens area måste vara tillräckligt stor, större än $0.35\, \rho c_p q_f / \kappa$.

`/stig`