Matematik Chalmers

Tentamen i TMV040/TMA681 Tillämpad matematik K, 2005–08–24 f V

Telefon: Micke P/Jonas H 0762–721860

För TMV040: Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Tabell för Laplacetransform från kompendiet finns på baksidan av detta blad.

För TMA681: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

Betygsgränser: 20–29 poäng 3, 30–39 poäng 4, 40–50 poäng 5.

---

1. (10 p) Funktionen f är udda och periodisk med period 4 och $f(t) = 1$ för $0 < t < 1$, $f(t) = 0$ för $1 < t < 2$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie. Tillämpa Parsevals formel.

2. (10 p) Bestäm den stationära lösningen till systemet

$$\begin{aligned} X_1'(t) &= -X_1(t) - 5X_1(t)e^{X_2(t)}, \\ X_2'(t) &= \alpha X_2(t) + 10X_1(t)e^{X_2(t)} + \beta, \end{aligned}$$

där α, β är konstanter. Linjärisera kring den stationära lösningen. För vilka värden på α, β är den stationära lösningen stabil?

3. (15 p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} u''(t) + 9u(t) &= 0 \\ u(0) = u_0,\ u'(0) &= u_1. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Lös (1) med hjälp av metoden med karakteristisk ekvation.

(b) Lös (1) med hjälp av metoden med Laplacetransform.

(c) Skriv (1) som ett system av ODE av första ordningen.

(d) Beskriv hur man löser detta system med hjälp av Matlab.

4. (15 p) Tankreaktorn. Visa att massbalansekvationen

$$V\frac{dc}{dt} = q(c_f - c) - kcV$$

kan transformeras till dimensionslös form

$$\frac{dX}{ds} = -(k\tau + U)X + U.$$

Bestäm $X(s)$ då $U = 0$. Bestäm $X(s)$ då $U = \bar{U}$ är konstant. Visa att lösningen i detta fall går mot ett stationärt tillstånd, $X(s) \to \bar{X}$ då $s \to \infty$. Bestäm $\bar{X}$. Vad betyder detta fysikaliskt? Hur ska $\bar{U}$ väljas för att $\bar{X}$ ska bli 0.5?

`/stig`

Vänd!

TABELL FÖR LAPLACETRANSFORMATION

	$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
L01	$f(t)$	$\int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$
L02	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
L03	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
L04	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
L05	$f(t-T)\theta(t-T) \quad (T \geq 0)$	$e^{-Ts} F(s)$
L06	$f'(t)$	$sF(s) - f(0-)$
L07	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0-)$
L08	$\int_{0-}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
L09	$\int_{0}^{t} f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
L09'	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau$ $f(t)=g(t)=0$ för $t<0$	$F(s)G(s)$
L10	$\delta(t)$	1
L11	$\delta^{(n)}(t)$	s^n
L12	1	$\frac{1}{s}$
L13	$\frac{t^n}{n!}$	s^{-n-1}

TABELL FÖR LAPLACETRANSFORMATION (forts.)

	$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
L14	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
L15	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
L16	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
L17	$\frac{t}{2b} \sin bt$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
L18	$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt \cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$
L19	$\delta(t-T) \quad (T \geq 0)$	$e^{-Ts} \quad (T \geq 0)$
L20	$\frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-a^2/4t} \quad (a > 0)$	$e^{-a\sqrt{s}} \quad (a > 0)$
L21	$\ell_n(t) = \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$	$\frac{(s-\frac{1}{2})^n}{(s+\frac{1}{2})^{n+1}}$

TMV040/TMA681 Tillämpad matematik K, 2005–08–24 f V. Lösningar.

1.

$$
\begin{aligned}
&T=4,\ \Omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\\
&a_n=0 \quad \text{ty } f \text{ är udda}\\
&b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\Omega t\,dt=\int_0^2 f(t)\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt=\int_0^1 \sin\frac{n\pi t}{2}\,dt\\
&\quad=\left[\frac{-\cos\frac{n\pi t}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{n\pi}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{2}\Big)=\begin{cases}\frac{2}{n\pi}, & n=1,3,5,\dots,\\ \frac{4}{n\pi}, & n=2,6,10,\dots,\\ 0, & n=4,8,12,\dots,\end{cases}
\end{aligned}
$$

eller

$$
\begin{aligned}
&b_n=\frac{4}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{4}.\\
&f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\sin n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\Big)\\
&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{2}\Big)\sin\frac{n\pi t}{2}\\
&\quad=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi t}{2}+0\\
&\qquad+\frac{2}{5\pi}\sin\frac{5\pi t}{2}+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{7\pi}\sin\frac{7\pi t}{2}+0+\frac{2}{9\pi}\sin\frac{9\pi t}{2}+\cdots
\end{aligned}
$$

Parsevals formel

$$
\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2\,dt=\tfrac{1}{4}a_0^2+\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n^2+b_n^2\big)
$$

blir

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}&=\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\Big(1-\cos\frac{n\pi}{2}\Big)^2\\
&=\frac{2}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{2}{9\pi^2}+0+\frac{2}{25\pi^2}+\frac{2}{9\pi^2}+\frac{2}{49\pi^2}+0+\frac{2}{81\pi^2}+\cdots
\end{aligned}
$$

2. De stationära lösningarna ges av ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
-\bar{X}_1-5\bar{X}_1e^{\bar{X}_2}&=0,\\
\alpha\bar{X}_2+10\bar{X}_1e^{\bar{X}_2}+\beta&=0,
\end{aligned}
$$

med en enda lösning $\bar{X}_1=0$, $\bar{X}_2=-\beta/\alpha$ (om $\alpha\neq 0$). Linjarisering kring denna punkt leder till det linjära systemet $x'(t)=Ax(t)$ med Jacobimatrisen

$$
A=\begin{bmatrix}-1-5e^{\bar{X}_2} & -5\bar{X}_1e^{\bar{X}_2}\\ 10e^{\bar{X}_2} & \alpha+10\bar{X}_1e^{\bar{X}_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-5e^{-\beta/\alpha} & 0\\ 10e^{-\beta/\alpha} & \alpha\end{bmatrix}.
$$

Egenvärdena är $\lambda_1=-1-5e^{-\beta/\alpha}<0$ och $\lambda_2=\alpha$ (obs att matrisen är triangulär, så att egenvärdena kan läsas av på diagonalen). Den stationära punkten är stabil om $\alpha<0$ och instabil om $\alpha>0$. Konstanten β påverkar inte stabiliteten.

3. (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 9 = 0$ med rötterna $r_1 = -3i$, $r_2 = 3i$. Den allmänna lösningen blir

$$\begin{aligned} u(t) &= Ae^{-3it} + Be^{3it} = C\cos(3t) + D\sin(3t) \\ u'(t) &= -3iAe^{-t} + 3iBe^{3t} = -3\sin(3t) + 3D\cos(3t). \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned} u_0 &= u(0) = A + B = C, \\ u_1 &= u'(0) = -3iA + 3iB = 3D, \end{aligned}$$

dvs $A = \frac{1}{6i}(3iu_0 - u_1)$, $B = \frac{1}{6i}(3iu_0 + u_1)$ eller $C = u_0$, $D = u_1/3$. Alltså:

$$u(t) = \frac{1}{6i}(3iu_0 - u_1)e^{-3it} + \frac{1}{6i}(3iu_0 + u_1)e^{3it} = u_0\cos(3t) + \frac{1}{3}u_1\sin(3t).$$

(b) Laplacetransformering ger

$$s^2U(s) - su_0 - u_1 + 9U(s) = 0$$

vilket leder till

$$U(s) = \frac{su_0 + u_1}{s^2 + 9} = u_0\frac{s}{s^2 + 9} + \frac{u_1}{3}\frac{3}{s^2 + 9}.$$

Inverstransformering enligt tabellen ger

$$u(t) = u_0\cos(3t) + \frac{1}{3}u_1\sin(3t).$$

(c) Med $x_1 = u$, $x_2 = u'$ får vi

$$\begin{aligned} x_1' &= u' = x_2, \\ x_2' &= u'' = -9u = -9x_1, \end{aligned}$$

dvs, på matrisform,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function xprime=funk(t,x)
xprime=[0 1; -9 0]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandona

```
>> u0=1; u1=2; x0=[u0; u1]; T=5;
>> [t,x]=ode45('funk',[0;T],x0);
```

4. Ekvationen divideras med $q_f c_f$. Med $\tau = V/q_f$ får vi

$$\tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{q}{q_f}\frac{c_f - c}{c_f} - \frac{c}{c_f}\tau k$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$s = t/\tau, \quad X(s) = \frac{c(s\tau)}{c_f}, \quad U(s) = \frac{q(s\tau)}{q_f},$$

får vi

$$\frac{c}{c_f} = X, \quad \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{dX}{ds}.$$

Detta leder till

$$\frac{dX}{ds} = U(1-X) - k\tau X = -(k\tau X + U) + U.$$

Med $U = 0$ får vi $X(s) = X_0 \exp(-k\tau s)$. Med $U = \bar{U}$ får vi

$$X(s) = X_0 \exp(-(k\tau + \bar{U})s) + \bar{U}\frac{1 - \exp(-(k\tau + \bar{U})s)}{k\tau + \bar{U}}.$$

Då $s \to \infty$ får vi

$$\bar{X} = \frac{\bar{U}}{k\tau + \bar{U}}.$$

Alternativt har vi att stationära punkter ges av

$$0 = -(k\tau\bar{X} + \bar{U}) + \bar{U}.$$

Vi löser ut styrvariabeln (med $\bar{X} = 0.5$)

$$\bar{U} = k\tau\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} = k\tau.$$

`/stig`