Flervariabelövningar

Fredrik Bengzon

3 mars 2004

Innehåll

1 Partiella derivator och kedjeregeln

Problem 1.1 *Bestäm partialderivatorna av första ordningen till*

a. $f(x, y) = x^2 - 6x + 2y^4$.

b. $f(x, y) = xy^2$.

c. $f(x, y) = x^3 + 2x^3y^4 - y^4$.

d. $f(x, y) = 2xy^2 - x^3y$.

e. $f(x, y) = \ln(x^2 + xy)$.

f. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy}$.

g. $f(x, y) = x^3e^{xy}$.

Problem 1.2 *Derivera partiellt*

a. $f(x, y) = x \arctan(xy)$.

b. $f(x, y) = e^{2x} \sin(x + y)$.

c. $f(x, y) = e^{xy} \ln(x/y)$.

Problem 1.3 *Bestäm de partiella derivatorna* f''_{xx}, f''_{xy} *och* f''_{yy} *till funktionen*

$$f(x, y) = x^3 + 4x^2y + 8xy^2 + 2y^3.$$

Problem 1.4 *Bestäm de partiella derivatorna* f''_{xx}, f''_{xy} *och* f''_{yy} *till funktionen*

$$f(x, y) = e^{xy} + x \ln xy.$$

Problem 1.5 *Beräkna derivatan* $f^{(3)}_{xxy}(1, 2)$ *om*

$$f(x, y) = \frac{e^{2x-y}}{x + y}.$$

Problem 1.6 *Låt* $f(x, y) = xy$ *och* $x = \cos t,\ y = \sin t$. *Använd kedjeregeln*

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

för att beräkna df/dt *då* $t = \pi/2$.

Problem 1.7 *Använd kedjeregeln för att beräkna* dz/dt *om*

a. $z = 3x^2 + 2xy^3, \quad x = t, \quad y = t^2$.

b. $z = x^3 - 5xy, \quad x = t, \quad y = t$.

c. $z = x^2y^3 + 3, \quad x = 2t^2, \quad y = t^3$.

d. $z = x^3y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t.$

e. $z = xy, \quad x = a + \alpha t, \quad y = b + \beta t.$

Problem 1.8 *Antag, att* $z = f(x, y)$ *är en funktion av två variabler med kontinuerliga partiella derivator. Om* $x = 3t + 2$ *och* $y = 2t - 1$*, beräkna* dz/dt*.*

Problem 1.9 *Bestäm alla funktioner* $f(x, y)$ *som uppfyller*

$$\frac{2x}{y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

genom att införa de nya variablerna $u = \frac{1}{y}$ *och* $v = xy^2$*.*

Problem 1.10 *Transformera*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

med substitutionen $u = x^2/y$*,* $v = y$*. Lös sedan differentialekvationen.*

Problem 1.11 *Transformera*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = f,$$

med substitutionen $u = x + y$*,* $v = x^2 - y^2$*. Lös sedan differentialekvationen.*

Problem 1.12 *Transformera vågekvationen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

där c *är konstant, genom att göra variabelbytet* $u = x + ct$ *och* $v = x - ct$*.*

Problem 1.13 *Transformera den partiella differentialekvationen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = (x - y)^2,$$

genom variabelsubstitutionen $u = x^2 - y^2$*,* $v = x - y$*.*

2 Gradient och riktningsderivata

Problem 2.1 *Beräkna gradientvektorn* ∇f *om funktionen* f *ges av*

a. $f(x, y) = x^2y + 4y^2.$

b. $f(x, y) = (2x + y)^2.$

c. $f(x, y) = x^2/y,\ y \neq 0.$

d. $f(x,y) = y^3xe^x$.

e. $f(x,y) = xye^{x+y}$.

f. $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$, $x \neq 0$.

Problem 2.2 *Bestäm* $\nabla f(x,y)$ *i punkten* $(2,3)$ *då*

a. $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$.

b. $f(x,y) = ye^{-xy^2+18}$.

c. $f(x,y) = y\cosh(x-2)$.

Problem 2.3 *Beräkna längden av gradientvektor, dvs.* $|\nabla f|$*, till funktionen*

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2+2},$$

i punkten $(1,1)$.

Problem 2.4 *Bestäm derivatan* f'_v *av funktionen*

$$f(x,y) = x^2y^3,$$

i punkten $(1,1)$*, längs riktningen* $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3})$.

Problem 2.5 *Beräkna derivatan i riktningen* $\mathbf{v} = (-2,2)$ *av funktionen*

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

i punkten $(1,1)$.

Problem 2.6 *Beräkna* f'_v *av funktionen* $f(x,y) = xy$ *i riktningen* $\mathbf{v} = (4,3)$ *och i punkten* $(1,1)$.

Problem 2.7 *Bestäm riktningen i vilken funktionen*

$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

växer snabbast i punkten $(1,2)$*, samt beräkna riktningsderivatan till* f *i denna punkt.*

3 Kurvor och ytor

Problem 3.1 *Rita följande ytor för hand eller i Matlab*

a. $f(x,y) = x^2 + y^2$.

b. $f(x,y) = x^2 - y^2$.

c. $f(x,y) = x - y$.

d. $f(x,y) = \sin(2x)\cos(2y)$.

e. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

Problem 3.2 *Skissera några nivåkurvor till funktionen*

$$f(x,y) = x^2 + 9y^2.$$

Problem 3.3 *Skissera några nivåkurvor till funktionen*

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y}.$$

Problem 3.4 *Rita nivåkurvorna och gradientens vektorfält till funktionen $f(x,y) = xy$ m.h.a. Matlab. Studera speciellt gradienten i sadelpunkten origo och vinkeln mellan nivåkurvorna och gradientvektorn.*

Problem 3.5 *Visa, att nivåkurvorna till ytan $z = f(x,y)$ är ortogonala mot gradienten $\nabla f(x,y)$ i varje punkt på ytan.*

Problem 3.6 *Rita kurvan*

$$x(t) = 2 - t, \quad y(t) = 1 + t,$$

från $t = 0$ till $t = 1$ och visa riktningen. Eliminera sedan t och härled kurvans ekvation i x och y.

Problem 3.7 *Rita kurvan*

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t,$$

från $t = 0$ till $t = 2\pi$ och visa riktningen. Eliminera sedan t och härled kurvans ekvation i x och y.

Problem 3.8 *Bestäm en tangentvektor i punkten $(1,0)$ till den kurva som i parameterform ges av*

a. $x(t) = \cos t, \quad y(t) = 4\sin t$.

b. $x(t) = (1+t)e^t, \quad y(t) = t^2 + t$.

Problem 3.9 *En partikel rör sig längs kurvan $s(t) = (t, t^2)$.*

a. Beräkna partikelns hastighet $\mathbf{v} = s'(t)$ vid tiden t.

b. Ange farten $|\mathbf{v}|$ vid tiden t.

c. Bestäm accelerationen $\mathbf{v}'(t)$.

Problem 3.10 *En partikel rör sig i xy-planet så att läget $s(t)$ vid tiden t ges av*

$$s(t) = (a \cos \omega t, b \sin \omega t),$$

där a, b och ω är konstanter.

a. *Hur långt från origo är partikeln vid tiden t?*

b. *Bestäm hastighet och acceleration som funktion av tiden.*

c. *Visa, att partikeln rör sig i en elliptisk bana, dvs. sådan att*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4 Taylors formel

Problem 4.1 *Bestäm tangentplanet till paraboloiden* $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ *i punkten* $(2,2)$.

Problem 4.2 *Bestäm tangentplanet till* $f(x,y) = x^2 + x + y^2$ *i punkten* $(2,2)$.

Problem 4.3 *Sök tangentplanet till* $z = x^4 - y^3 + 2xy$ *i punkten* $(1,1,2)$ *på ytan.*

Problem 4.4 *Taylorutveckla funktionen*

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y},$$

till första ordning kring punkten $(3,3)$.

Problem 4.5 *Bestäm tangentplanet till den tvåmantlade hyperboloiden*

$$x^2 + y^2 - z^2 = -2,$$

i punkten $(1,1,2)$.

Problem 4.6 *Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan*

a. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ *i punkten* $(1,1,1)$.

b. $z^2 = x^2 y$ *i punkten* $(-2,1,4)$.

Problem 4.7 *Bestäm konstanten* C *så att ytan* $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = C$ *tangerar planet genom punkterna* $(0,1,2)$, $(1,3,0)$ *och* $(0,3,0)$.

Problem 4.8 *Bestäm alla punkter på ytan* $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz = 1$, *i vilka ytans tangentplan är parallellt med planet* $x + y + z = 0$.

Problem 4.9 *Bestäm Taylorpolynomet av andra ordning till funktionen*

$$f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 1,$$

i punkten $(0,0)$.

Problem 4.10 *Taylorutveckla* $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ *till andra ordning kring* $(1,1)$.

Problem 4.11 *Bestäm MacLaurinpolynomet av andra graden till*

a. $f(x,y) = \ln(1 + x + y^2)$.

b. $f(x,y) = e^{xy}\cos(x + y)$.

M.a.o. beräkna Taylorpolynomet av ordning två kring punkten $(0,0)$.

Problem 4.12 *Bestäm alla stationära punkter till funktionen*

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + xy.$$

Problem 4.13 *Bestäm alla stationära punkter till funktionen*

$$f(x, y) = e^{-x}(1 - x^2/3 - y^2).$$

Problem 4.14 *Givet funktionen* $f(x, y) = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$.

a. Beräkna Hessianmatrisen

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix},$$

i punkten $(4, -1)$.

b. Ange om Hessianen är positivt definit, negativt definit eller indefinit.

c. Avgör om $(4, -1)$ *är en minpunkt, maxpunkt eller sadelpunkt till* $f(x, y)$.

Problem 4.15 *Bestäm om origo är ett lokalt max eller min för Gausspulsen*

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}.$$

Problem 4.16 *Sök eventuella lokala extremvärden till funktionen*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Problem 4.17 *Sök eventuella lokala extremvärden till funktionen*

$$f(x, y) = (1 + xy)e^{-y}.$$

Problem 4.18 *Bestäm alla stationära punkter till funktionen*

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 3y.$$

Avgör sedan för var och en av dem, av vilken typ den är.

5 Divergens och rotation

Problem 5.1 *Beräkna divergens,* $\nabla \cdot \mathbf{F}$*, och rotation,* $\nabla \times \mathbf{F}$ *av*

$$\mathbf{F} = (x^2, y^2, 3zx).$$

Problem 5.2 *Beräkna divergens och rotation till vektorfälten*

a. $\mathbf{F}(x, y, z) = \alpha(x, y, 0)$.

b. $\mathbf{F}(x, y, z) = \alpha(-y, x, 0)$.

Problem 5.3 *Beräkna divergensen av vektorfälten*

a. $\mathbf{A} = (y, z, x)$.

b. $\mathbf{A} = xyz(1, 1, 1)$.

Problem 5.4 *Visa, att* $\nabla \times (\nabla f) = 0$ *för alla skalära funktioner* $f(x, y, z)$.

Problem 5.5 *Beräkna rotationen av vektorfältet* $\mathbf{A} = (ye^x, xe^y, z)$.

Problem 5.6 *Beräkna divergensen av vektorfältet*

$$\mathbf{F} = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

Problem 5.7 *Visa, att fältet* $\mathbf{F} = (2xy^3, 1 + 3x^2y^2, 3z^2)$ *är rotationsfritt.*

Problem 5.8 *Visa att vektorfältet*

$$\mathbf{E} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

är divergensfritt i varje område utom origo.

Problem 5.9 *Visa, att fältet*

$$\mathbf{A} = ((y^2 + z^2)yz, (z^2 + x^2)zx, (x^2 + y^2)xy)$$

har samma rotation som fältet $\mathbf{B} = (x^2yz, y^2zx, z^2xy)$.

6 Kurvintegralen

Problem 6.1 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\Gamma x\, ds,$$

längs kurvan Γ, *given av parametriseringen*

a. $s(t) = (t, t^2) \quad 0 \le t \le 2$.

b. $s(t) = (4 \sin t, 4 \cos t, 3) \quad 0 \le t \le \pi$.

Problem 6.2 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\Gamma (3 + x + y) ds,$$

längs cirkeln $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \le t \le 2\pi$.

Problem 6.3 *Låt* Γ *vara en helix med parametrisering* $s(t) = (\sin t, \cos t, t) \quad t \in [0, \pi]$. *Beräkna*

$$\int_\Gamma (xy + z) ds.$$

Problem 6.4 *Beräkna*

$$\int_\Gamma xydx + (x - y)dy,$$

där Γ *har parameterframställningen* $x(t) = t$, $y(t) = 1 - t$, $0 \leq t \leq 1$.

Problem 6.5 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\Gamma ydx + xdy,$$

längs det räta linjestycket Γ *från* $(1, 2)$ *till* $(3, 4)$.

Problem 6.6 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds,$$

där $\Gamma = s(t)$, *med* $s(t) = (t, t^2) \quad t \in [0, 1]$ *och* $\mathbf{F} = (x^2, y)$.

Problem 6.7 *Beräkna linjeintegralen av* $\mathbf{F} = (2xz, 3y^2, x^2)$ *längs kurvan* C, *definierad parametriskt av*

$$s(t) = (t, \tfrac{1}{2}t^2, \tfrac{1}{2}t^3) \quad t \in [0, 2].$$

Problem 6.8 *Ett kraftfält ges av* $\mathbf{F} = (x - y + 1, y)$. *Bestäm arbetet*

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds,$$

som $\mathbf{F}$ *utför på en partikel som flyttas längs kurvan* $\Gamma : y = x^3$ *från punkten* $(0, 0)$ *till* $(1, 1)$.

Problem 6.9 *Beräkna linjeintegralen av vektorfältet*

$$\mathbf{F} = (-x^2 y, y^3)$$

runt ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *genomlupen ett varv motsols.*

Problem 6.10 *Beräkna integralen*

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds; \quad \mathbf{F} = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}$$

där Γ *är den moturs orienterade cirkeln med radie* R *och centrum i origo.*

7 Dubbelintegralen

Problem 7.1 *Beräkna, m.h.a itererad integration, dubbelintegralerna*

a.

$$\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\, dxdy.$$

b.

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos y \, dxdy.$$

c.

$$\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dxdy.$$

Problem 7.2 *Beräkna dubbelintegralen över rektangeln R, då*

a.

$$\iint_R xe^{xy}\, dxdy, \qquad R = [0,1] \times [0,1].$$

b.

$$\iint_R \frac{dxdy}{x+y}, \qquad R = [0,1] \times [1,2].$$

Problem 7.3 *Antag, att arean av området Ω är 10 och att*

$$\iint_\Omega x\, dxdy = 2, \qquad \iint_\Omega y\, dxdy = 7.$$

Vad blir värdet av dubbelintegralen

$$\iint_\Omega (3x + 5y - 2)\, dxdy.$$

Problem 7.4 *Beräkna dubbelintegralen*

$$\iint_\Delta y \cos(xy)\, dxdy,$$

där Δ är rektangeln, som definieras av olikheterna $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi/2$.

Problem 7.5 *Beräkna*

$$\iint_\Delta \frac{x}{(1+xy)^2}\,dxdy,$$

där Δ *är rektangeln, som definieras av olikheterna* $1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1$.

Problem 7.6 *Beräkna*

$$\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy,$$

om D *är det område som ligger mellan linjerna* $x = 1$, $x = 4$ *och mellan* $y = x$ *och* $y = 3x$.

Problem 7.7 *Beräkna*

$$\iint_K (3x + 18y)\,dxdy,$$

där K *är det område som begränsas av linjerna* $x = 1$, $x = 3$, $y = -2x/3 + 4$ *och* $y = x/3$.

Problem 7.8 *Beräkna*

$$\iint_B (x + 2y)\,dxdy,$$

där B *är den mängd som begränsas av* $x = 0$, $y = 0$ *och* $y = 2 - x$.

Problem 7.9 *Beräkna*

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy,$$

där D *är triangeln med hörn i punkterna* $(0,0)$, $(1,0)$ *och* $(1,1)$.

Problem 7.10 *Betrakta det linjära variabelbytet*

$$\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases},$$

där $ad - bc \neq 0$. *Antag, att rektangeln* R *spänns av vektorerna* $(0,h)$ *och* $(k,0)$ *uttryckt i koordinaterna* x *och* y.

a. Skriv transformationen på matrisform.

b. Beräkna rektangelns hörn i koordinaterna u *och* v.

c. Bestäm arean av den transformerade rektangeln.

Problem 7.11 *Beräkna volymen av den del av paraboloiden*

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2,$$

som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 4$.

Problem 7.12 *Använd polära koordinater för att beräkna integralen*

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Problem 7.13 *Använd transformationen* $x = 3u - 2v$, $y = u + v$ *för att beräkna*

$$\iint_R (2x - y)\, dxdy,$$

där R *är regionen som begränsas av linjerna* $x + 2y = 0$, $x + 2y = 10$, $3y - x = 0$ *och* $3y - x = 5$.

Problem 7.14 *Använd transformationen* $u = x + 2y$, $v = x - 2y$ *för att beräkna*

$$\iint_R (3x + 6y)^2 dxdy,$$

där R *är regionen som begränsas av linjerna* $x - 2y = -2$, $x + 2y = 2$, $x + 2y = -2$ *och* $x - 2y = 2$.

Problem 7.15 *Beräkna*

$$\iint_K e^{x-y} dxdy,$$

där K *är kvadraten som begränsas av linjerna* $x - y = 1$, $x + y = 1$, $x + y = -1$ *och* $x - y = -1$.

Problem 7.16 *Beräkna*

$$\iint_D (x^4 - y^4) dxdy,$$

där området D *är begränsat av olikheterna* $1 \leq x^2 - y^2 \leq 2$ *och* $1 \leq xy \leq 2$. *Ledning: sätt* $u = x^2 - y^2$ *och* $v = xy$.

Problem 7.17 *Beräkna dubbelintegralen*

$$\iint_E \frac{y}{x - 2y}\, dxdy,$$

då E *är parallellogrammen* $E = \{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 3,\ 1 \leq x - 2y \leq 4\}$.

Problem 7.18 *Beräkna*

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy,$$

då D *är cirkelringen* $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, *där* $0 \leq a \leq b$.

Problem 7.19 *Låt* T *vara triangeln med hörn i* $(0,0)$, $(2,1)$ *samt* $(1,2)$ *och beräkna*

$$\iint_T y\,dxdy.$$

Tips: dela triangeln T *i två mindre trianglar som är lätta att integrera över och addera resultaten.*

Problem 7.20 *Beräkna arean av området i första kvadranten, som begränsas av kurvorna* $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2/x^2$ *och* $y = 4/x^2$. *Ledning: låt* $u = xy$ *och* $v = x^2y$.

Problem 7.21 *Beräkna*

$$\iint_K |x+y| \ln |x-y|\,dxdy,$$

där K *är området* $|x| + |y| \leq 1$.

8 Greens formel i planet

Problem 8.1 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_C (x^2y^3 + x)\,dx + (y^2x^3 + y)\,dy,$$

då C är randen till ellipsen $9x^2 + 4y^2 = 1$.

Problem 8.2 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_C (x^2y - y^3)\,dx + (x^3 - xy^2)\,dy,$$

då C är cirkeln $x^2 + y^2 = 9$ genomlöpt ett varv moturs.

Problem 8.3 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_C (e^{\sin x} - x^2y)\,dx + e^{y^2}\,dy,$$

där C är enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ genomlöpt i positiv led.

Problem 8.4 *Beräkna*

$$\int_C (x^3 - x^2y)\,dx + xy^2\,dy,$$

där C är cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ genomlupen ett varv moturs.

Problem 8.5 *Betrakta kurvintegralen*

$$\int_C e^y\,dx - e^x\,dy,$$

tagen moturs runt randen C till kvadraten med motstående hörn i $(0,0)$ och $(1,1)$. Beräkna denna integral genom att evaluera en ekvivalent dubbelintegral över kvadraten.

Problem 8.6 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2},$$

där C är bågen från $(4,0)$ till $(0,4)$ av parabeln $y^2 = 16 - 4x$.

Problem 8.7 *Visa, m.h.a. Greens formel, att arean av en yta Ω i planet ges av*

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma x\,dy - y\,dx,$$

där Γ är den positivt orienterade randen till Ω. Beräkna sedan arean av ellipsen, som begränsas av kurvan $\Gamma : s(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$.

Problem 8.8 *Visa, m.h.a. Green's formel, att*

$$\iint_S \frac{x^2 + 4xy + y^2}{(x+y)^2}\, dxdy = \frac{a^2}{2}(\pi + 1),$$

där S *är regionen* $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x, y \geq 0$. *Tips:* $P = -\dfrac{y^2}{x+y}$; $Q = \dfrac{x^2}{x+y}$.

9 Trippelintegralen

Problem 9.1 *Beräkna*

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} dzdydx.$$

Problem 9.2 *Beräkna*

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} 2xy\, dzdydx.$$

Problem 9.3 *Beräkna*

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^x (x+2z)\, dzdydx.$$

Problem 9.4 *Beräkna*

$$\iiint_\Omega (x+y+z)\, dzdydx,$$

där Ω *är den kub som ges av olikheterna* $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ *och* $0 \leq z \leq 1$.

Problem 9.5 *Beräkna*

$$\iiint_\Omega x\, dzdydx,$$

där Ω *är området, som definieras av olikheterna* $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$ *och* $2y \leq z \leq 1+y^2$.

Problem 9.6 *Beräkna*

$$\iiint_\Omega xz\, dzdydx,$$

där Ω *är den kropp, som begränsas av planen* $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ *och* $z=0$.

Problem 9.7 *Beräkna*

$$\iiint_\Omega x^2ye^{xyz}\, dzdydx,$$

där Ω *är den kub som definieras av* $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ *och* $0 \leq z \leq 1$.

Problem 9.8 *Beräkna värdet av trippelintegralen*

$$\iiint_K f(x,y,z)\, dzdydx,$$

där $f(x,y,z) = xy\sin z$ *och* $K = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi]$.

Problem 9.9 *Beräkna trippelintegralen*

$$\iiint_E ze^x\,dxdydz,$$

där E är området $E = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1, 0 \le y \le 2z, 0 \le x \le z+2\}$.

Problem 9.10 *Beräkna integralen*

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\,dxdydz.$$

Problem 9.11 *Beräkna*

$$\iiint_K \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) dxdydz,$$

över kuben $K = \{(x,y,z) : 1 \le x,y,z \le a\}$.

Problem 9.12 *Beräkna*

$$\iiint_K x^3 \sin z \cos z\,dxdydz,$$

då K definieras av olikheterna $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ och $0 \le z \le \pi/2$.

Problem 9.13 *Beräkna värdet av trippelintegralen*

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz,$$

där $f(x,y,z) = 2x+3y$ och T är tetraedern i första oktanten, som begränsas av koordinatplanen och $2x+3y+z=6$.

Problem 9.14 *Beräkna värdet av trippelintegralen*

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dxdydz,$$

där $f(x,y,z) = x+y$ och S är området mellan ytorna $z = 2-x^2$ och $z = x^2$ från $0 \le y \le 3$.

Problem 9.15 *Beräkna*

$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dzdydx,$$

över cylindern $R = \{(x,y,z) : 0 \le x^2+y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le h\}$.

Problem 9.16 *Beräkna*

$$\iiint_E (x^2+y^2)\,dxdydz,$$

över konen $E = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$.

Problem 9.17 *Beräkna volymen av cylindern som begränsas av ytorna* $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ *och* $z = 4$.

Problem 9.18 *Beräkna*

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz,$$

om D *är området som ligger i cylindern* $x^2 + y^2 = 1$, *under planet* $z = 4$ *och ovanför paraboloiden* $z = 1 - x^2 - y^2$.

Problem 9.19 *Bestäm*

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dzdydx,$$

där B *är klotet, som definieras av olikheten* $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

Problem 9.20 *Beräkna integralen*

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dzdydx,$$

där Ω *är det område som ligger innanför klotet* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *och ovanför konen* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10 Ytintegralen

Problem 10.1 *Arean av en parametriserad yta* $S = S(u,v)$ *ges av*

$$\iint_\Omega \|S'_u \times S'_v\| \, dudv.$$

där Ω *är en parameterdomän. Visa, att detta uttryck reduceras till*

$$\iint_\Omega \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} \, dxdy,$$

om ytan kan skrivas $S(x,y) = (x, y, f(x,y))$.

Problem 10.2 *Beräkna arean av ytan* $S(\varphi, z)$ *med* $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, h]$ *om*

a. $S(\varphi, z) = (a \cos\varphi, a \sin\varphi, z)$.

b. $S(\varphi, z) = (z \cos\varphi, z \sin\varphi, z)$.

Problem 10.3 *Beräkna arean av en sfär. Tips: använd parametriseringen*

$$S(\varphi, \theta) = R(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta) \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Problem 10.4 *Beräkna ytintegralen*

$$\iint_S (xy + z) \, dS,$$

där S *är den del av planet* $x + y + z = 2$ *som ligger i första oktanten.*

Problem 10.5 *Beräkna ytintegralen*

$$\iint_S x^2 yz \, dS,$$

där S *är den del av planet* $z = 1 + 2x + 3y$ *som ligger ovanför rektangeln* $[0,3] \times [0,2]$.

Problem 10.6 *Beräkna ytintegralen*

$$\iint_S yz \, dS,$$

där S *är det triangulära området med hörn i* $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ *och* $(0,0,2)$.

Problem 10.7 *Beräkna ytintegralen*

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z) \, dS,$$

där S *är ytan* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z > 0$.

Problem 10.8 *Låt* $\mathbf{F} = (6z, -4, y)$. *Visa, att*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 8,$$

där S *är den delen av planet* $2x + 3y + 6z = 12$, *som finns i första oktanten.*

Problem 10.9 *Bestäm flödet av vektorfältet*

$$\mathbf{F} = (0, 0, z^2)$$

över den del av ytan $z = 2 - (x^2 + y^2)$ *som ligger ovanför* xy*-planet.*

Problem 10.10 *Beräkna flödet av fältet*

$$\mathbf{F} = (x, y, 0)$$

genom mantelytan till halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

11 Gauss' sats

Problem 11.1 *Givet vektorfältet* $\mathbf{F} = (2x^2 - 3z, -2xy, -4x)$, *beräkna*

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dxdydz,$$

där V *är den slutna region som begränsas av planen* $x = 0$, $z = 0$ *och* $2x + 2y + z = 4$.

Problem 11.2 *Låt* $\mathbf{F} = (xy^2 + e^{-y} \sin z, x^2 y + e^x \cos z, \arctan xy)$. *Beräkna*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

där S *är begränsningsytan till kroppen* $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 9\}$ *med normalriktning nedåt.*

Problem 11.3 *Beräkna (normal)ytintegralen*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

över ytan S *till rätblocket* D, *som begränsas av* $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ *och* $z = \frac{3}{2}$.

Problem 11.4 *Beräkna flödet av fältet* $\mathbf{F} = z^2(x, y, z)$ *dvs.*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

genom mantelytan S *till sfären* D *med centrum i origo och med radie* 3.

Problem 11.5 *Beräkna flödet av vektorfältet*

$$\mathbf{F} = (3x + z^2, y, x^2 + y^2)$$

genom mantelytan S *till halvsfären* $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = b, \; z \geq 0\}$.

Problem 11.6 *Beräkna flödet av vektorfältet*

$$\mathbf{F} = (-e^{yz}, e^{xz}, z^2)$$

genom struten T *definierad av* $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ *och orienterad med utåtriktad normal.*

12 Stokes' sats

Problem 12.1 *Låt ytan S vara den del av planet $z = 4 - x - 2y$, $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2 - x/2$, som ligger i första oktanten och har den positivt orienterade randkurvan γ. Vidare, låt $\mathbf{F} = (y, -z, xy)$. Använd Stokes' sats och beräkna*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds.$$

Problem 12.2 *Låt S beteckna en liksidig triangel med sidolängd 1 belägen i planet $ax + by + cz = 0$. Beräkna det arbete, som vektorfältet $\mathbf{F} = (x - 2y - 3z, 2x - 3y - z, 3x - y - 2z)$ uträttar längs triangelns randkurva γ genomlöpt ett varv moturs sett från punkten (a, b, c).*

Problem 12.3 *Antag, att $\mathbf{F} = (3z, 5x, -2y)$. Beräkna m.h.a. Stokes' sats*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds,$$

där γ är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $z = y + 3$ orienterad moturs sedd uppifrån.

Problem 12.4 *En cirkel med centrum i $(2, 6, 5)$ och med radie R ligger i planet $3x + y + z = 5$. Beräkna den s.k. cirkulationen, d.v.s. linjeintegralen*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds,$$

med $\mathbf{F} = (0, 3z + y, 2y)$ längs den moturs orienterade randkurvan C till cirkeln.

Problem 12.5 *Låt C vara en cirkel med radie R i planet $x+y+z = 3$. Beräkna*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds,$$

om $\mathbf{F} = (z^2, x^2, y^2)$ och om C är orienterad moturs sett ovanfrån.

Problem 12.6 *Låt C vara skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 = 1$ och $z = x^2 + 2y^2$ orienterad moturs sedd uppifrån. Beräkna arbetet som fältet $\mathbf{F} = (x^2 - y, y^2 + x, 1)$ utför på en partikel som flyttas längs kurvan C. Ledning: låt ytan S ges av $z = x^2 + 2y^2$ med $x^2 + y^2 \leq 1$. Randen till S är då kurvan C, vilket ger $\mathbf{n}\, dS = (-2x, -4y, 1)\, dxdy$.*

13 Potentialfält

Problem 13.1 *Bestäm en potential till vektorfältet*

$$\mathbf{F} = (y^2, 2xy).$$

Problem 13.2 *Bestäm en potential till vektorfälten nedan:*

a. $\mathbf{F} = (2xy,\ x^2 - y^2)$.

b. $\mathbf{F} = (3x^2y^2z + 2xy,\ 2x^3yz + x^2 + 1,\ x^3y^2)$.

Problem 13.3 *Undersök om fältet* $\mathbf{F} = (3y + 2x,\ x)$ *är konservativt.*

Problem 13.4 *Visa, att vektorfältet*

$$\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2)$$

är konservativt och bestäm dess potential $\varphi(x, y, z)$.

Problem 13.5

a. Bestäm potentialen till fältet $\mathbf{F} = (y + 2x, x)$.

b. Beräkna, m.h.a. en potential, kurvintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds,$$

där Γ *är halvcirkeln från punkten* $(3, 1)$ *till* $(1, 1)$.

Problem 13.6 *Visa, att fältet* $\mathbf{F} = (yz + 2y, xz + 2x, xy + 3)$ *är konservativt. Beräkna sedan, m.h.a. en potential, kurvintegralen av* $\mathbf{F}$ *längs linjestycket* Γ *från* $(0, 0, 0)$ *till* $(1, 1, 1)$.

Problem 13.7

a. Bestäm a *och* b *så att fältet* $\mathbf{F} = (4x^3y - 3by^2,\ 2ax^4 - 3xy)$ *blir konservativt.*

b. Med a *och* b *valda som i deluppgiften ovan, beräkna m.h.a. en potential*

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds,$$

där Γ *är den slutna kurvan* $s(t) = (\sin^3 t,\ e^{\cos t})$ *med* $0 \le t \le 2\pi$.

Problem 13.8 *Beräkna integralen* $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot ds$*, där*

$$\mathbf{F} = (2xyz^2, x^2z^2 + z \cos yz, 2x^2yz + y \cos yz),$$

längs en godtycklig kurva C *från* $(0, 0, 1)$ *till* $(1, \frac{\pi}{4}, 2)$.

Problem 13.9 *Antag, att fältet* $\mathbf{F}$ *har en potential* $\varphi(x, y)$ *så att* $\mathbf{F} = \nabla\varphi(x, y)$. *Visa, att detta innebär att*

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha),$$

där $s(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$ *är en parametrisering av* Γ. *Ledning: använd kedjeregeln* $\dfrac{d\varphi}{dt} = \nabla\varphi(s(t)) \cdot s(t)$.

Svar 1.1

a. $f'_x = 2x - 6$, $f'_y = 8y^3$.

b. $f'_x = y^2$, $f'_y = 2xy$.

c. $f'_x = 3x^2 + 6x^2y^4$, $f'_y = 8x^3y^3 - 4y^3$.

d. $f'_x = 2y^2 - 3x^2y$, $f'_y = 4xy - x^3$.

e. $f'_x = \dfrac{2x+y}{x^2+xy}$, $f'_y = \dfrac{x}{x^2+xy}$.

f. $f'_x = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+2yx}}$, $f'_y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2yx}}$.

g. $f'_x = x^2(3+xy)e^{xy}$, $f'_y = x^4e^{xy}$.

Svar 1.2

a. $f'_x = \dfrac{xy}{1+x^2y^2} + \arctan(xy)$, $f'_y = \dfrac{x^2}{1+x^2y^2}$.

b. $f'_x = e^{2x}\cos(x+y) + 2e^{2x}\sin(x+y)$, $f'_y = e^{2x}\cos(x+y)$.

c. $f'_x = ye^{xy}\ln(x/y) + \frac{1}{x}e^{xy}$, $f'_y = xe^{xy}\ln(x/y) - \frac{1}{xy}e^{xy}$.

Svar 1.3 $f''_{xx} = 6x + 8y$, $f''_{xy} = 8x + 16y$ och $f''_{yy} = 16x + 12y$.

Svar 1.4 $f''_{xx} = \frac{1}{x} + e^{xy}y^2$, $f''_{xy} = \frac{1}{y} + e^{xy}(1+xy)$ och $f''_{yy} = x\left(xe^{xy} - \dfrac{1}{y^2}\right)$.

Svar 1.5 Efter mycket arbete får vi

$$f^{(3)}_{xxy} = -\frac{2e^{2x-y}(3 + 2x^3 - 3y + 6x^2y + 2y^3 + x(6y^2-3))}{(x+y)^4},$$

vilket ger $f^{(3)}_{xxy}(1,2) = -32/27$.

Svar 1.6 Vi har $\partial f/\partial x = y$, $\partial f/\partial y = x$, $dx/dt = -\sin t$ och $dy/dt = \cos t$, dvs.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -y\sin t + x\cos t = -\sin^2 t + \cos^2 t,$$

eftersom $x = \cos t$ och $y = \sin t$. Vid $t = \pi/2$ får vi alltså $df/dt = -1$.

Svar 1.7

a. $14t^6 + 6t$

b. $3t^2 - 10t$

c. $52t^{12}$

d. $2\cos^4 \sin t - 3\cos^2 t \sin^3 t$

e. $\alpha(b + \beta t) + \beta(a + \alpha t)$

Svar 1.8 Kedjeregeln ger oss totalderivatan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

där $\partial x/\partial t = 3$ eftersom $x = 3t + 2$. P.s.s. har vi $\partial y/\partial t = 2$, vilket resulterar i

$$\frac{dz}{dt} = 3\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Då vi inte känner utseendet av funktionen $f(x, y)$ närmare är detta vårt svar.

Svar 1.9 För att uttrycka $\partial f/\partial x$ och $\partial f/\partial y$ i derivator m.a.p. u och v skriver vi

$$f = f(u, v) = f(u(x, y), v(x, y)),$$

och använder kedjeregeln

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y^2,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2xy.\end{aligned}$$

Differentialekvationen $\dfrac{2x}{y}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ transformeras alltså till

$$\frac{2x}{y}y^2\frac{\partial f}{\partial v} - \left(-\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0,$$

dvs. till $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$ om $y \neq 0$. Detta betyder att $f(u, v)$ enbart beror på variabeln v dvs. att $f(u, v) = g(v)$ eller $f(x, y) = g(xy^2)$.

Svar 1.10 $f(x, y) = g(\frac{x^2}{y})$.

Svar 1.11 $f(x, y) = (x + y) \cdot g(x^2 - y^2)$.

Svar 1.12 Kedjeregeln ger först

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},\\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial f}{\partial u} - c\frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

Samma användning av kedjeregeln upprepas nu på varje tern i uttrycken för $\partial f/\partial x$ och $\partial f/\partial y$. Vi måste komma ihåg att både $\partial f/\partial u$ och $\partial f/\partial u$ beror av u och v, vilka i sin tur beror av x och t. Vi får då

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot 1+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot 1\right]+\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot 1+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot 1\right]\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial f}{\partial u}-c+\frac{\partial f}{\partial v}\right) = c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)-c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ &= c\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot c+\frac{\partial}{\partial v}\left(s\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot(-c)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot c+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot(-c)\right]\\ &= c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).\end{aligned}$$

Insättning i vågekvationen ger sedan

$$-4c^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0.$$

Svar 1.13 Transformera derivatorna m.h.a. kedjeregeln, vilket ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{1}{4}.$$

Svar 2.1 Gradienten av funktionen $f(x,y)$ i punkten $(\bar{x},\bar{y})$ definieras som

$$\nabla f(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}),\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})\right).$$

Observera att gradienten är en vektor.

a. $\nabla f(x,y)=(2xy,x^2+8y)$

b. $\nabla f(x,y)=(4(2x+y),2(2x+y))$

c. $\nabla f(x,y)=(2x/y,-x^2/y^2)$

d. $\nabla f(x,y)=(y^3(1+x)e^x,3y^2xe^x)$

e. $\nabla f(x,y)=(y(1+x)e^{x+y},x(1+y)e^{x+y})$

f. $\nabla f(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$

Svar 2.2

a. $\nabla f(2,3) = (16, 54)$

b. $\nabla f(2,3) = (-27, -35)$

c. $\nabla f(2,3) = (0, 1)$

Svar 2.3 Vi får $\nabla f(1,1) = (-2, -2)$. vilket ger längden $|\nabla f| = \sqrt{8}$.

Svar 2.4 Vi har att $\nabla f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$. Den angivna riktningen är inte normerad utan måste justeras till $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$. Då f'_v är projektionen av gradienten ∇f på vektorn $\mathbf{v}$, fås.

$$f'_v(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \mathbf{v} = (2,3) \cdot \tfrac{1}{2}(1, \sqrt{3}) = 1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Jfr. formeln för projektion av en vektor på en annan.

Svar 2.5 0 dvs. $\nabla f(1,1)$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala.

Svar 2.6 7/5

Svar 2.7 Vi har $f'_v(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot v = |\nabla f(1,2)| \cos\theta$, om $|\mathbf{v}| = 1$ och θ är vinkeln mellan ∇f och $\mathbf{v}$. Största värdet av $\cos\theta$ är 1 ($\theta = 0$), vilket ger maximala riktningsderivatan $|\nabla f(1,2)| = \sqrt{5}/2$. Om $\theta = 0$ pekar $\mathbf{v}$ i samma riktning som $\nabla f(1,2)$ dvs. $\mathbf{v} = (-1, -2)/\sqrt{5}$.

Svar 3.1 Skriv t.ex. följande kod i Matlab:

```
>> [X,Y] = meshgrid(-2:.2:2, -2:.2:2);
>> Z = sin(2*X).*cos(2*Y);
>> surf(X,Y,Z)
```

Svar 3.2 En nivåkurva består av alla punkter som uppfyller $f(x,y) = C$ för någon konstant C. I vårt fall ges alltså nivåkurvorna av $x^2 + 9y^2 = C$. Eftersom $x^2 + 9y^2 \geq 0$ måste $C \geq 0$, dvs.

$$\frac{x^2}{C} + \frac{9y^2}{C} = 1.$$

Nivåkurvorna är ellipser med origo som mittpunkt och med halvaxlarna $\sqrt{C}$ och $\frac{1}{3}\sqrt{C}$.

Svar 3.3 Nivåkurvorna är av formen $x^2/y = C$. Om $C \neq 0$ kan vi skriva

$$y = \frac{x^2}{C},$$

dvs. de är parabler.

Svar 3.4 Skriv t.ex. följande kod i Matlab:
```
>> [X,Y] = meshgrid(-5:.5:5, -5:.5:5);
>> Z = X.*Y;
>> [px,py] = gradient(Z,.5,.5);
>> contour(Z), hold on, quiver(px,py), hold off
```

Svar 3.5 Betrakta en punkt (a, b) på nivåkurvan $f(x, y) = C$. Låt $x = x(t)$ och $y = y(t)$ vara en parametrisering av denna nivåkurva med $x(t_0) = a$ och $y(t_0) = b$. Det gäller att $f(x(t), y(t)) = C$. Alltså har funktionen en derivata m.a.p. t som är noll, dvs. m.h.a. kedjeregeln

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) = 0.$$

Speciellt för $t = t_0$ erhålls $\nabla f(a, b) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)) = 0$. Men $(x'(t_0), y'(t_0))$ är kurvans tangentvektor i punkten (a, b) och det följer att $\nabla f(a, b)$ är vinkelrät mot kurvans tangent i (a, b).

Svar 3.6 Kurvan beskriver linjen $y = 3 - x$ från $(2, 1)$ till $(1, 2)$.

Svar 3.7 Vi får cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ genomlupen ett varv moturs. Visualisera t.ex. i Matlab m.h.a.
```
>> t = 0:0.01:2*pi;
>> x = sin(t);
>> y = cos(t);
>> comet(x,y)
```

Svar 3.8 Tangenten ges av vektorn $(x'(t), y'(t))$.

a. $(0, 4)$

b. $(2, 0)$

Svar 3.9

a. $\mathbf{v}(t) = (1, 2t)$

b. $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2 + 4t^2}$

c. $\mathbf{v}'(t) = (0, 2)$

Svar 3.10

a. Avståndet d till origo vid tiden t ges av $d = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$.

b. Partikelns hastighet ges av tangentvektorn $s'(t) = \omega(-a \sin \omega t, b \cos \omega t)$ och accelerationen av dess tidsderivata $s''(t) = -\omega^2(a \cos \omega t, b \sin \omega t)$, dvs. $s''(t) = -\omega^2 s(t)$.

c. -

Svar 4.1 Tangentplanet i punkten (a, b) till funktionen $z = f(x, y)$ ges av

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Då $f'_x = 4x$ och $f'_y = 6y$ erhålls $f'_x(2, 2) = 8$ och $f'_y(2, 2) = 12$ i detta fall. Detta ger tangentplanet $z = 20 + 8(x - 2) + 12(y - 2)$ till ytan $z = 2x^2 + 3y^2$ i punkten $(2, 2)$.

Svar 4.2 $z + 8 = 5x + 4y$

Svar 4.3 $z + y + 3 = 6x$

Svar 4.4 $z = 3 + 2(x - 3) - 3(y - 3)$

Svar 4.5 Betrakta nivåytan $g(x, y, z) = C$ och ta en punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ som ligger på denna, dvs. så att $g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = C$. Vi vet att gradienten $\nabla g(x, y, z)$ är normal till nivåytan $g(x, y, z) = C$, vilket medför att den också måste vara vinkelrät mot tangentplanet. Detta ges i punkten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ av

$$(x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z}) \cdot n = 0,$$

där n är en normal till ytan $g(x, y, z) = C$. Välj $n = \nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Detta ger

$$g'_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x - \bar{x}) + g'_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x - \bar{y}) + g'_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(z - \bar{z}) = 0.$$

Sätt nu $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, så att hyperboloiden berskrivs av nivåytan $g(x, y, z) = -2$. Eftersom $g'_x(1, 1, 2) = 2$, $g'_y(1, 1, 2) = 2$ och $g'_z(1, 1, 2) = -4$, ges tangentplanets ekvation av

$$2(x - 1) + 2(y - 1) - 4(z - 2) = 0,$$

eller förenklat $2x + 2y + 4 = 4z$.

Svar 4.6

a. $x + 2y + 3z = 6$

b. -

Svar 4.7 $C = 11$

Svar 4.8 Punkterna $\frac{1}{\sqrt{6}}(3, -1, 1)$ och $\frac{1}{\sqrt{6}}(-3, 1, -1)$.

Svar 4.9 $y^2 + 2xy - 1$

Svar 4.10 $x(3 + (y - 3)y)$

Svar 4.11

a. $x - \frac{1}{2}x^2 + y^2$

b. $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

Svar 4.12 Origo är enda stationära punkten (sadelpunkt).

Svar 4.13 Villkoren $f'_x = (x^2/3 - 2x/3 + y^2 - 1)e^{-x} = 0$ och $f'_y = -2ye^{-x} = 0$ ger de stationära punkterna $(-1, 0)$ och $(3, 0)$.

Svar 4.14 a.

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

b. Negativt definit ty egenvärdena till H är negativa.

c. Maxpunkt, ty $\nabla f(4, -1) = 0$ och H är negativt definit.

Svar 4.15 maxpunkt

Svar 4.16 Sadelpunkt i origo och lokala minima i punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.

Svar 4.17 Sadelpunkt i $(1, 0)$.

Svar 4.18 Lokalt minimum $(0, 1)$ och sadelpunkt i $(0, -1)$.

Svar 5.1 Beteckna $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (x^2, y^2, 3zx)$. Divergensen ges av

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= 2x + 2y + 3x = 5x + 2y. \end{aligned}$$

Rotationen fås m.h.a.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &= (0, -3z, 0). \end{aligned}$$

Svar 5.2

a. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2\alpha$, $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 0)$

b. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 2\alpha)$

Svar 5.3

a. $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

b. $\nabla \cdot \mathbf{A} = yz + xz + xy$

Svar 5.4 -

Svar 5.5 $\nabla \times A = (0, 0, e^y - e^x)$

Svar 5.6 0

Svar 5.7 $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 0)$

Svar 5.8 -

Svar 5.9 -

Svar 6.1

a. Parametriseringen $s(t)$ innebär att kurvans kartesiska koordinater ges av $x(t) = t$ och $y(t) = t^2$. Linjeelementet ds beräknas med Pythagoras sats, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, dvs. uttryckt i t

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{1 + 4t^2}\, dt.$$

Insatt i integralen ger detta

$$\int_\Gamma x\, ds = \int_0^2 t\sqrt{1 + 4t^2} dt = \left[\tfrac{1}{12}\,(1 + 4t^2)^{3/2}\right]_0^2 = \tfrac{1}{12}(17\sqrt{17} - 1).$$

b. 32. Observera att $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Svar 6.2 6π

Svar 6.3 $\pi^2/\sqrt{2}$

Svar 6.4 Vi har $x'(t) = 1$ och $y'(t) = -1$, vilket medör att $dx = dt$ och $dy = -dt$. Vi erhåller nu

$$\begin{aligned}\int_\Gamma xydx + (x - y)\, dy &= \int_0^1 t(1 - t)dt + (2t - 1)(-dt)\\ &= \int_0^1 (1 - t - t^2)\, dt = \left[t - \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{6}t^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

Svar 6.5 Vi måste hitta en parametrisering av kurvan Γ. En sådan ges t.ex. av $s(t) = (t, 1 + t)$ med $t \in [0, 1]$. Övertyga dig om att linjen $s(t)$ går genom $(1, 2)$ och $(3, 4)$! Eftersom parametriseringen innebär att $dx = dy = dt$, fås nu

$$\int_\Gamma ydx + xdy = \int_0^1 (2t + 1)\, dt = 2.$$

Svar 6.6 Observera först att ds och $\mathbf{F}$ nu är vektorer! Denna typ av integral kan lätt återföras på en form vi redan sett genom att vi skriver $ds = (dx, dy)$.

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot ds &= \int_\Gamma (x^2, y)\cdot(dx, dy)\\ &= \int_\Gamma x^2 dx + y\,dy = \quad \{dx = dt,\ dy = 2t\,dt\}\\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^3)\,dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{2}t^4\right]_0^1 = \tfrac{5}{6}.\end{aligned}$$

Svar 6.7 Vi ser att $dx = dt$, $dy = tdt$ och $dz = \frac{3}{2}t^2dt$, vilket ger oss

$$\int_C \mathbf{F}\cdot ds = \int_0^2 (t^4 + \tfrac{3}{4}\,t^5 + \tfrac{3}{2}t^4)\,dt = 24.$$

Svar 6.8 Parametrisera kurvan med t.ex. $s(t) = (t^3, t) \quad t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot ds &= \int_\Gamma (x - y - 1, y)\cdot(dx, dy)\\ &= \int_\Gamma (x - y - 1)\,dx + y\,dy = \quad \{dx = 3t^2\,dt,\ dy = dt\}\\ &= \int_0^1 (3t^2(t^3 - t - 1) + t)\,dt = -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Svar 6.9 En enkel parametrisering av ellipsens randkurva C är $x = a\cos t$ och $y = b\sin t$. Om vi börjar i $(a, 0)$ och går hela varvet runt motsols varierar t från 0 till 2π. Alltså,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot ds &= \int_C -x^2y\,dx + y^3\,dy\\ &= \int_0^{2\pi} a^3b\cos^2 t\sin^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} b^4\sin^3 t\cos t\,dt\\ &= \tfrac{1}{4}\,a^3b\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt, \quad \text{den andra integralen är noll,}\\ &= \tfrac{1}{8}\,a^3b\int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{\pi}{4}a^3b.\end{aligned}$$

Svar 6.10 0. Fältet är ortogonalt mot kurvans tangentvektor.

Svar 7.1

a. Integranden är kontinuerlig på integrationsområdet varför vi kan beräkna integralen med itererad integration. Vi börjar med att beräkna den inre integralen

$$A(y) = \int_0^1 (1 + 4xy)\,dx = \left[x + 2x^2y\right]_{x=0}^{x=1} = 1 + 2y,$$

och därefter den yttre

$$\int_1^3 A(y)dy = \int_1^3 (1+2y)\,dy = \big[y + y^2\big]_{y=1}^{y=3} = 10.$$

Den sökta dubbelintegralen är alltså lika med 10.

b. 1

c. $\frac{21}{2}\ln 2$

Svar 7.2

a. $e - 2$

b. Arrangera räkningarna på följande vis:

$$\int_1^2 \int_0^1 \frac{dxdy}{x+y} = \int_1^2 [\ln(x+y)]_0^1\,dy = \int_1^2 (\ln(1+y) - \ln y)\,dy$$
$$= [(y+1)\ln(y+1) - (y+1) - (y\ln y - y)]_1^2 = \ln\frac{27}{16}.$$

Svar 7.3 21

Svar 7.4 1

Svar 7.5 $2 - \ln 2$

Svar 7.6 30

Svar 7.7 144

Svar 7.8 4

Svar 7.9 1/3

Svar 7.10 a. Transformationen blir på matrisform

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b. Hörnen fär koordinaterna $(0,0)$, $h(a,c)$, $k(b,d)$ och $(ha+hc, bk+dk)$.

c. Arean blir $hk(ad - bc)$.

Svar 7.11 28π

Svar 7.12 $\frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})$

Svar 7.13 Variabelbytet $x = 3u - 2v$, $y = u + v$ gör att integrationsområdet R övergår i rektangeln $R' = [0, 2] \times [0, 1]$ i uv-planet. Areaskalningen ges av funktionaldetermianten

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Integranden ges av är $2x - y = 2(3u - 2v) - (u + v) = 5u - 5v$. Slutligen får vi

$$\begin{aligned} \iint_R (2x - y)\,dxdy &= \iint_{R'} (5u - 5v) \cdot 5\,dudv \\ &= 25 \int_0^2 \int_0^1 (u - v)\,dvdu = 25 \int_0^2 [uv - \tfrac{1}{2}\,v^2]_0^1\,du \\ &= 25 \int_0^2 (u - \tfrac{1}{2})\,du = 25[\tfrac{1}{2}\,u^2 - \tfrac{1}{2}\,u]_0^2 = 25. \end{aligned}$$

Svar 7.14 48

Svar 7.15 $e - 1/e$

Svar 7.16 $3/4$

Svar 7.17 Med den föreslagna substitutionen övergår integrationsområdet i rektangeln $E' = [0, 3] \times [1, 4]$ i uv-planet. Funktionaldeterminanten ges av

$$\left|\det \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right| = \frac{1}{\left|\det \dfrac{d(u, v)}{d(x, y)}\right|},$$

dvs.

$$dxdy = \left|\det \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right| dudv = \frac{dudv}{\left|\det \dfrac{d(u, v)}{d(x, y)}\right|} = \frac{dudv}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{dudv}{|-3\,|}.$$

Slutligen fås

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{y}{x - 2y}\,dxdy &= \iint_{E'} \frac{u - v}{3v} \cdot \frac{dudv}{3} = \frac{1}{9} \int_0^3 \int_1^4 \left(\frac{u}{v} - 1\right) dvdu \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 (u \ln 4 - 3)\,du = \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Svar 7.18 Området beskrivs enklast i polära koordinater $x = r \cos\varphi$ och $y = r \sin\varphi$ med $a \leq r \leq b$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Vi har sedan

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2 - y^2}\,dxdy &= \int_a^b \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b re^{-r^2}\,dr \\ &= 2\pi \left[-\tfrac{1}{2} e^{-r^2}\right]_a^b = \pi \left(e^{-a^2} - e^{-b^2}\right). \end{aligned}$$

Svar 7.19 Linjerna som begränsar T ges av $2x-y=0$, $x+y=3$ och $x-2y=0$. Dela t.ex. T i bitarna T_1 och T_2, där T_1 är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(\frac{1}{2},1)$ och $(2,1)$. Detta bestämmer automatiskt T_2. Totala integralen är summan av integralerna över respektive triangel. Vi får

$$\iint_{T_1} y\,dxdy = \int_0^1 y\left(\int_{y/2}^{2y} dx\right) dy = \frac{1}{2},$$

$$\iint_{T_2} y\,dxdy = \int_1^2 y\left(\int_{y/2}^{3-y} dx\right) dy = 1,$$

dvs. svaret är $1+1/2=3/2$.

Svar 7.20 Arean av D ges av integralen

$$\iint_D dxdy = \iint_{D'} \left|\det\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv,$$

där D bestäms av olikheterna $1 \leq xy \leq 2$ och $2 \leq x^2y \leq 4$. Med variabelbytet $u = xy$ och $v = x^2y$ övergår området D till rektangeln $D' = [1,2]\times[2,4]$ i uv-planet. Funktionaldeterminanten ges av

$$\det\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2xy & x^2 \end{vmatrix} = -x^2y = -v,$$

dvs.

$$\left|\det\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \frac{1}{v}.$$

Vi får nu

$$\iint_D dxdy = \iint_{D'} \frac{dudv}{v} = \int_1^2 du\int_2^4 \frac{dv}{v} = \int_1^2 (\ln 4 - \ln 2)\,du = \ln 2.$$

Svar 7.21 Vi noterar att integranden är positiv på hela K, som begränsas av linjerna $x+y=\pm 1$ och $x-y=\pm 1$. Det är därför lämpligt att införa de nya variablerna $u=x+y$ och $v=x-y$. Det nya området i uv-planet blir rutan $K' = [-1,1]\times[-1,1]$. Vi har nu

$$\det\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \det\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = -\frac{1}{2},$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\iint_K |x+y|\ln|x-y|\,dxdy &= \iint_{K'} |u|\ln|v|\frac{dudv}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 |u|\,du \int_{-1}^1 \ln|v|\,dv \\ &= \int_0^1 2u\,du\int_0^1 \ln v\,dv = [v\ln v - v]_0^1 = -1.\end{aligned}$$

Här har vi använt gränsvärdet $\lim_{v\to 0} v\ln v = 0$.

Svar 8.1 Sätt $P = x^2y^3 + x$ och $Q = y^2x^3 + y$ och låt D vara ellipsen, som innesluts av C. Då $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 0$ fås, p.g.a. Greens formel

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

att kurvintegralen försvinner.

Svar 8.2 Sätt $P = x^2y - y^3$ och $Q = x^3 - xy^2$. Vi har $\partial Q/\partial x = 3x^2 - y^2$ och $\partial P/\partial y = x^2 - 3y^2$. Greens formel ger då

$$\int_C (x^2y - y^3)\, dx + (x^3 - xy^2)\, dy = 2 \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy,$$

där D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 9$. Dubbelintegralen evalueras lättast i polära koordinater. Vi har alltså

$$2 \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 \cdot r dr d\varphi = 2 \cdot 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^3 = 81\pi.$$

Svar 8.3 $\pi/4$

Svar 8.4 8π

Svar 8.5 $2 - 2e$

Svar 8.6 Skriv integralen på formen

$$\int_C Pdx + Qdy; \qquad P = \frac{y}{(x+y)^2}; \qquad Q = -\frac{x}{(x+y)^2}.$$

Vi ser att $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ om $x + y \neq 0$. Nu innesluter inte C något område, varför vi inte kan använda Greens formel direkt. Addera därför linjen L mellan $(4, 0)$ och $(0, 4)$ till integrationsvägen. Kurvan $L + C$ bildar då rand till området D, som ligger under parabeln $y^2 = 16 - 4x$ och över linjen $y = 4 - x$ med $0 \leq x \leq 4$. Förutsättningarna för Greens formel är nu uppfyllda, dvs.

$$\int_{C+L} \frac{y\, dx - x\, dy}{(x+y)^2} = \int_{C+L} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Vidare, längs linjen $y = 4 - x$ gäller att $dy = -dx$, vilket medför att

$$\int_L \frac{y\, dx - x\, dy}{(x+y)^2} = \int_0^4 \frac{(4-x) + x}{4^2}\, dx = 1.$$

P.g.a. orienteringen av L blir kurvintegralen över C alltså -1.

Svar 8.7 Sätt $P = -y$ och $Q = x$. Arean av ytan Ω ges av

$$\begin{aligned}\iint_\Omega dxdy &= \frac{1}{2}\iint_\Omega 2\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_\Gamma Pdx + Qdy = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx.\end{aligned}$$

Arean av ellipsen $s(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$ blir alltså

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t \cdot (-a\sin t))\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = \pi ab.\end{aligned}$$

Svar 8.8 Tips: $\cos^3\alpha + \sin^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)$.

Svar 9.1

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{x^2}^x\int_0^{xy} dzdydx &= \int_0^1\int_{x^2}^x\left(\int_0^{xy} 1\,dz\right)dydx \\ &= \int_0^1\int_{x^2}^x [z]_0^{xy}\,dydx = \int_0^1\left(\int_{x^2}^x xy\,dy\right)dx \\ &= \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 x\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$

Svar 9.2

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_x^{2x}\int_0^{x+y} 2xy\,dzdydx \\ &\quad = \int_0^1\int_x^{2x} [2xyz]_0^{x+y}\,dydx = \int_0^1\int_x^{2x} 2xy(x+y)\,dydx \\ &\quad = \int_0^1\int_x^{2x} (2x^2y + 2xy^2)\,dydx = \int_0^1\left[x^2y^2 + \frac{2xy^3}{3}\right]_x^{2x} dx \\ &\quad = \int_0^1 \left(x^2\cdot(2x)^2 + \tfrac{2}{3}\,x\cdot(2x)^3 - \left(x^4 + \tfrac{2}{3}\,x^4\right)\right)dx \\ &\quad = \int_0^1 \frac{23}{3}\,x^4\,dx = \frac{23}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{23}{15}\end{aligned}$$

Svar 9.3 1/10

Svar 9.4 3/2

Svar 9.5 1/10

Svar 9.6 1/120

Svar 9.7 $e - 5/2$

Svar 9.8

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi xy \sin z \, dzdydx &= \int_0^\pi \int_0^\pi xy \left[-\cos z\right]_0^\pi \, dydx \\ &= \int_0^\pi 2x \left[\tfrac{1}{2}\, y^2\right]_0^\pi dx = \pi^2 \left[\tfrac{1}{2}\, x^2\right]_0^\pi = \tfrac{1}{2}\pi^4\end{aligned}$$

Svar 9.9 $2e^2(e-2) - 2/3$. Börja med att integrera m.a.p x, sedan y och sist z. Använd partialintegration på z-integralen.

Svar 9.10

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2} \, dxdydz &= \int_0^1 \int_0^z \left[xze^{-y^2}\right]_0^y dydz \\ &= \int_0^1 \int_0^z yze^{-y^2} \, dydz = \int_0^1 \left[-\tfrac{1}{2}\, ze^{-y^2}\right]_0^z dz \\ &= \int_0^1 -\tfrac{1}{2}\left(ze^{-z^2} - z\right) dz = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\, e^{-z^2} + \tfrac{1}{2}\, z^2\right]_0^1 = \frac{1}{4e}\end{aligned}$$

Svar 9.11 $3(a-1)^2 \ln a$

Svar 9.12 1/4

Svar 9.13 Tetraedern T begränsas av planen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ och $2x + 3y + z = 6$. Detta medför att $0 \le z \le 6 - 3y - 2x$. Projektionen av T på planet $z = 0$ innesluts av linjerna $y = 0$ och $2x + 3y = 6$, där $0 \le x \le 3$. Integralen av $(2x + 3y)$ över T ges därför av

$$\int_0^3 \int_0^{2-2x/3} \int_0^{6-2x-3y} (2x+3y) \, dzdydx = 18.$$

Svar 9.14 Ytorna $z = 2 - x^2$ och $z = x^2$ skär varandra längs linjerna $x = 1$ och $x = -1$. Integrationsgränserna är därför $0 \le y \le 3$, $-1 \le x \le 1$ och $x^2 \le z \le 2 - x^2$, vilket ger

$$\int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} (x+y) \, dzdxdy = 12.$$

Svar 9.15 Cylindern ligger parallellt med z-axeln med mittpunkt i origo, har höjden h och radien a. Den beskrivs enklast med cylindriska koordinater $x =$

$r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ och z med $0 \le r \le a$, $0 \le z \le h$ och $0 \le \varphi \le 2\pi$. Vi får

$$\begin{aligned}
\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz &= \iiint_R (r^2+z^2)r\,drd\varphi dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^a (r^2+z^2)r\,drd\varphi dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \left[\tfrac{1}{4}\,r^4 + \tfrac{1}{2}\,z^2r^2\right]_0^a \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(\tfrac{1}{4}\,a^4 + \tfrac{1}{2}\,z^2a^2\right) dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\tfrac{1}{4}\,a^4z + \tfrac{1}{6}\,z^3a^2\right]_0^h \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4}\,a^4h + \tfrac{1}{6}\,a^2h^3\right) d\varphi = \tfrac{1}{6}\,\pi a^2h(3a^2+2h^2).
\end{aligned}$$

Svar 9.16 Projektionen av E på planet $z = 0$ är cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 4$. Den undre ytan av E beskrivs av $z = \sqrt{x^2+y^2}$ och den övre av planet $z = 2$. Konen beskrivs enklast i cylindriska koordinater $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ och z med $0 \le r \le 2$, $r \le z \le 2$ och $0 \le \varphi \le 2\pi$. Eftersom $dxdydz = r\,dzdrd\varphi$ fås nu

$$\begin{aligned}
\iiint_E (x^2+y^2)\,dxdydz &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\,dzdydx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\cdot r dzdrd\varphi = \frac{16}{5}\,\pi.
\end{aligned}$$

Svar 9.17 16π

Svar 9.18 $\frac{12}{5}\,\pi$

Svar 9.19 Klotet kan beskrivas med sfäriska koordinater $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ och $z = r\cos\theta$ med $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le r \le a$. Volymselementet är $dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ och $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, vilket medför att

$$\begin{aligned}
\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a r^4\sin\theta drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a \sin\theta\,d\theta d\varphi \\
&= \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta d\varphi \\
&= \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi}d\varphi = \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi} 2\,d\varphi = \frac{4}{5}\,\pi a^5.
\end{aligned}$$

Svar 9.20 I sfäriska koordinater får klotet och konen ekvationerna $r = 1$ respektive $\theta = \pi/4$. Integrationsområdet bestäms av olikheterna $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz &= \iiint_\Omega r \cdot r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr \\
&= \frac{\pi}{2}\big[-\cos\theta\big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{4}.
\end{aligned}$$

Svar 10.1 Se boken.

Svar 10.2

a. Parameterformen $S(\varphi, z)$ beskriver en cylinder med radie a, centrum i origo och med höjden h. Arean av cylinderns mantelyta ges av ytintegralen

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \|S'_\varphi \times S'_z\|\, d\varphi dz.$$

Eftersom $S_\varphi = (-a\sin\varphi, a\cos\varphi, 0)$ och $S_z = (0,0,1)$, fås

$$S_\varphi \times S_z = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -a\sin\varphi & a\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0),$$

vilket för övrigt är en normal till cylinderns mantelyta. Vidare har vi $\|S_\varphi \times S_z\| = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = a$, vilket slutligen ger arean

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \|S'_\varphi \times S'_z\|\, d\varphi dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} a\, d\varphi dz = 2\pi a h.$$

b. $\sqrt{2}\pi h^2$

Svar 10.3 $4\pi R^2$

Svar 10.4 Planet S kan skrivas $z = f(x,y) = 2 - x - y$, dvs.

$$\iint_S (xy+z)\, dS = \iint_S (xy + 2 - x - y)\, dS.$$

För att beräkna ytelemenetet dS, behövs nu en parameterframställningav S, t.ex. $S(x,y) = (x, y, f(x,y)) = (x, y, 2-x-y)$. En infintesimal area på ytan S kan skrivas

$$dS = \|S'_x \times S'_y\|\, dxdy = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, dxdy = \sqrt{3}\, dxdy.$$

Eftersom $x, y, z \geq 0$ i första oktanten fås integrationsgränserna $0 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq 2 - x$. Slutligen erhålls

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} (xy + 2 - x - y)\sqrt{3}\, dydx = 2\sqrt{3}.$$

Svar 10.5 $171\sqrt{14}$

Svar 10.6 –

Svar 10.7 32π

Svar 10.8 Planet kan parametriseras av $S(x, y) = (x, y, 2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y)$. En normal ges av $S_x' \times S_y = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$. Med normalisering fås $\mathbf{n} = \frac{1}{7}(2, 3, 6)$. Ytelementet blir $dS = \|S_x' \times S_y\|\, dxdy = \frac{7}{6}\, dxdy$. Integrationsgränserna ges av $0 \leq x \leq 6$ och $0 \leq y \leq 4 - 2x/3$. Alltså,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_S (12 - 2x - 3y, -4, y) \cdot \tfrac{1}{7}(2, 3, 6)\, dS \\
&= \tfrac{1}{7} \int_0^6 \int_0^{4-2x/3} (24 - 4x - 6y - 12 + 6y) \cdot \tfrac{7}{6}\, dxdy \\
&= \tfrac{1}{6} \int_0^6 \int_0^{4-2x/3} (12 - 4x)\, dxdy = 8.
\end{aligned}$$

Svar 10.9 Ytan S kan parametriseras $S(x, y) = (x, y, 2 - (x^2 + y^2))$. Då ytans tangentvektorer är $S_x' = (1, 0, -2x)$ och $S_y' = (0, 1, -2y)$ fås enhetsnormalen

$$\mathbf{n} = \frac{S_x' \times S_y'}{\|S_x' \times S_y'\|} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Ytelementet dS ges av $dS = \|S_x' \times S_y'\|\, dxdy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy$. Vi får

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_D z^2\, dxdy,$$

där D är projektionen av S på xy-planet. Eftersom området D är cirkelskivan $x^2 + y^2 = 2$, evalueras integralen lättast med polära koordinater. Insättning av $z = 2 - x^2 - y^2$ ger slutligen

$$\begin{aligned}
\iint_D z^2\, dxdy &= \iint_D (2 - x^2 - y^2)^2\, dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)r\, drd\varphi = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3)\, dr = 2\pi.
\end{aligned}$$

Svar 10.10 Ytan parametriseras enklast i sfäriska koordinater (r, θ, φ). Då radien är konstant $r = a$ på ytan, fås

$$S(\theta, \varphi) = (a \sin\theta \cos\varphi, a \sin\theta \sin\varphi, a \cos\theta).$$

Parameterformen ger ytelementet $dS = a^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$, och enhetsnormalen

$$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

Eftersom $\mathbf{F} = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, 0)$ erhålls nu

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS &= a^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi)\, d\theta d\varphi \\
&= a^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta d\varphi \\
&= 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3.
\end{aligned}$$

Svar 11.1 Vi har $\nabla\cdot\mathbf{F} = 4x - 2x = 2x$, så volymsintegralen ges av

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dxdydz &= \iint_V 2x\, dxdydz \\
&= 2\int_0^2 x\, dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{4-2x-2y} dz \\
&= 2\int_0^2 x\, dx \int_0^{2-x} (4-2x-2y)\, dy \\
&= 2\int_0^2 x\left[4y - 2xy - y^2\right]_0^{2-x} dx \\
&= 2\int_0^2 (4x - 4x^2 + x^3)\, dx = \tfrac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Svar 11.2 Vi ser genast att $\nabla\cdot\mathbf{F} = x^2 + y^2$. Gauss' sats ger nu

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dxdydz \\
&= \iiint_V (x^2+y^2)\, dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^9 (x^2+y^2)\, dz \\
&= \iint_D (9 - x^2 - y^2)(x^2+y^2)\, dxdy,
\end{aligned}$$

där D är cirkelskivan $x^2 + y^2 = 9$. Byte till polära koordinater ger oss nu

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} r^2(9-r^2) r d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^3 (9r^3 - r^5)\, dr \\
&= 2\pi \left[\frac{9}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^6\right]_0^3 = \frac{243\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Svar 11.3 Eftersom $\nabla \cdot \mathbf{F} = 4x + xz$, fås m.h.a. Gauss' sats

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iint_D (4x + xz)\, dxdydz \\
&= \int_0^{3/2} dz \int_0^1 dy \int_0^2 (4x + xz)\, dx \\
&= \int_0^{3/2} dz \int_0^1 \left[2x^2 + \tfrac{1}{2}\, x^2 z\right]_0^2 dy = \int_0^{3/2} dz \int_0^1 (8 + 2z)\, dy \\
&= \int_0^{3/2} [8y + 2zy]_0^1\, dz = \int_0^{3/2} (8 + 2z)\, dz = \frac{57}{4}.
\end{aligned}$$

Svar 11.4 Efter några enkla deriveringar fås

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{4z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Byte till sfäriska koordinater ger $\nabla \cdot \mathbf{F} = 4r\cos^2\theta$. M.h.a Gauss' sats får vi

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz \\
&= \iiint_D (4r\cos^2\theta) r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi \\
&= 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^3 r^3\, dr = 108\pi.
\end{aligned}$$

Svar 11.5 Gauss' sats kan inte användas direkt eftersom S inte är en sluten yta. Men om vi lägger till cirkelskivan D, definierad av $x^2 + y^2 \le b^2$, $z = 0$, så innesluter ytorna S och D halvsfären $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| \le b,\ z \ge 0\}$. Förutsättningarna för Gauss' sats är nu uppfyllda. Om normalen till D väljs utåtriktad fås

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz.$$

Volymen av en halvsfären med radie b är $\frac{2}{3}\,\pi b^3$ och eftersom $\nabla \cdot \mathbf{F} = 4$, fås

$$\iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_B 4\, dxdydz = 4 \cdot \tfrac{2}{3}\,\pi b^3.$$

Positiva enhetsnormalen till D är $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, vilket ger

$$\begin{aligned}
\iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_D (3x + z^2, y, x^2 + y^2) \cdot (0, 0, -1)\, dS \\
&= \iint_D -(x^2 + y^2)\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^b -r^3 drd\varphi = -\tfrac{1}{2}\,\pi b^4,
\end{aligned}$$

dvs. den sökta integralen har värdet $\frac{8}{3}\,\pi b^3 + \frac{1}{2}\,\pi b^4$.

Svar 11.6 Problemet kan inte direkt lösas med Gauss' sats eftersom T inte utgör hela begränsningsytan till ett område i rummet. Genom att tillfoga L, det plana locket $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$ uppfylles emellertid detta villkor, ty $T + L$ är en begränsningsyta till käglan K, given av $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1$, $z \geq 0$. Vi har därför att

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} \, dzdyx - \iint_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Vidare är $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2z$. I höjdled är T begränsad av $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$. Projektionen D av T på xy-planet är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, vilket medför att

$$\begin{aligned}
\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} \, dzdydx &= \iint_D \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 2z \, dzdydx \\
&= \iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dydx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Eftersom $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ är en enhetsnormal på L och z där har värdet 1 får vi

$$\iint_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_L z^2 \, dS = \iint_L 1^2 \, dS = \pi,$$

dvs. totala flödet genom T är $-\frac{1}{2}\pi$.

Svar 12.1 Planet parametriseras av $S(x, y) = (x, y, 4-x-2y)$. Normalen ges av $S'_x \times S'_y = (1, 2, 1)$. Rotationen är $\nabla \times \mathbf{F} = (1+x, -y, -1)$, dvs. $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (1, 2, 1) = 1 + x - 2y - 1 = x - 2y$. Stokes' sats ger nu

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^4 \int_0^{2-x/2} (x - 2y) \, dxdy = 0,$$

där vi utnyttjat att $dS = \|S'_x \times S'_y\| \, dxdy$ och att $\mathbf{n} = \dfrac{S'_x \times S'_y}{\|S'_x \times S'_y\|}$.

Svar 12.2 Arbetet ges av linjeintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

där vi använt Stokes' sats. Rotationen ges av

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x - 2y - 3z & 2x - 3y - z & 3x - y - 2z \end{vmatrix} = (0, -6, 4).$$

En normal till planet $ax + by + cz = 0$ ges av $\mathbf{n} = \dfrac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Vi får

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_S \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (-6b + 4c)\, dS \\ &= \frac{4c - 6b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \iint_S dS = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{4c - 6b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att arean av triangeln S är $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Svar 12.3 Beräkna först rotationen

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix} = (-2, 3, 5).$$

Om Y betecknar det ytstycke i planet $z = y + 3$, som innesluts av γ med normalen $\mathbf{n} = (0, -1, 1)$ blir γ rand till Y med positiv orientering. Stokes' sats ger därför

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds &= \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \iint_Y (-2, 3, 5) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1)\, dS \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \iint_Y dS = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{2}\pi = 2\pi,\end{aligned}$$

där vi normaliserat $\mathbf{n}$ samt beräknat arean av Y genom att inse att Y är en ellips med halvaxlarna $\sqrt{2}$ och 1.

Svar 12.4 Använd Stokes' sats

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

där D är cirkelskivan som omsluts av C. Vidare, $\nabla \times \mathbf{F} = (-1, 0, 0)$. En normal till D med rätt orientering är $\mathbf{n} = (3, 1, 1)/\sqrt{11}$, dvs. komponenten i normalriktningen till $\nabla \times \mathbf{F}$ är $-3/\sqrt{11}$. Arean av D är πR^2, så cirkulationen är $-3\pi R^2/\sqrt{11}$.

Svar 12.5 Vi har $\nabla \times \mathbf{F} = (2y, 2z, 2x)$. Låt D vara cirkelskivan i planet $x + y + z = 3$, som har randen C. En uppåtriktad enhetsnormal till D är $\mathbf{n} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$. Stokes' sats ger nu

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot ds &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_D (2y, 2z, 2x) \cdot (1, 1, 1)\, dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_D (2x + 2y + 2z)\, dS = 2\sqrt{3} \iint_D dS = 2\sqrt{3}\pi R^2,\end{aligned}$$

där vi använt oss av arean av cirkelskivan för att beräkna integralen i sista ledet.

Svar 12.6 2π

Svar 13.1 Potentialen $\varphi(x,y)$ ska uppfylla

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y^2 \quad \text{och} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy.$$

Integration av den första ekvationen m.a.p. x leder till

$$\varphi(x,y) = y^2 x + g(y).$$

P.s.s. ger integration av den andra ekvationen m.a.p. y

$$\varphi(x,y) = xy^2 + h(x).$$

Funktionerna $g(y)$ och $h(x)$ är godtyckliga och uppstår här istället för den vanliga konstanten som alltid fås då vi söker primitiva funktioner. För att få konsistens mellan våra två uttryck för $\varphi(x,y)$ måste vi ha $g(y) = h(x) = c$, med c en konstant. Alltså är $\varphi(x,y) = xy^2 + c$.

Svar 13.2

a. $\varphi(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + c$

b. Om $\mathbf{F} = (3x^2y^2z + 2xy,\ 2x^3yz + x^2 + 1,\ x^3y^2)$ uppfyller potentialen $\varphi(x,y,z)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2xy, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x^3yz + x^2 + 1, \quad \text{och} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = x^3y^2.$$

Högra ekvationen medför att $\varphi(x,y,z) = x^3y^2z + f(x,y)$. Insatt i vänstra ekvationen ger detta $3x^2y^2z + f'_x(x,y) = 3x^2y^2z + 2xy$, dvs. $f'_x(x,y) = 2xy$ och $f(x,y) = x^2y + g(y)$. Potentialen ges alltså av $\varphi(x,y,z) = x^3y^2z + x^2y + g(y)$. Insättning i mittersta ekvationen ger $2x^3yz + x^2 + g'(y) = 2x^3yz + x^2 + 1$. Vi får $g'(y) = 1$ och $g(y) = y + c$, med c konstant. Slutligen fås alltså $\varphi(x,y,z) = x^3y^2z + x^2y + y + c$.

Svar 13.3 $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, -2)$. Fältet är inte konservativt.

Svar 13.4 $\varphi(x,y,z) = y^2 \sin x + xz^3 + 2z - 4y + c$

Svar 13.5

a. $\mathbf{F} = (y + 2x, x)$ är rotationsfritt och har potentialen $\varphi(x,y) = xy + x^2 + c$.

b. Om $\mathbf{F}$ har en potential ges kurvintegralen av skillnaden i denna mellan start- och slutpunkt, dvs.

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds = \varphi(3,1) - \varphi(1,1) = -10.$$

Potentialen $\varphi(x,y)$ är alltså ett slags primitiv till kurvintegralen, som är *oberoende* av integrationsvägen Γ.

Svar 13.6 $\mathbf{F}$ är konservativt, ty $\nabla \times \mathbf{F} = (0,0,0)$. Det finns då en potential $\varphi(x,y,z)$ sådan att $\mathbf{F} = \nabla\varphi(x,y,z)$. Denna ges av $\varphi(x,y,z) = xyz + 2xy + 3z$. I origo har vi $\varphi(0,0,0) = 0$ och vid ändpunkten $\varphi(1,1,1) = 6$, dvs.

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds = \varphi(1,1,1) - \varphi(0,0,0) = 6.$$

Svar 13.7

a. Eftersom rotationen ges av

$$\nabla \times \mathbf{F} = (0,\ 0,\ 8ax^3 - 3y - 4x^3 + 6by)$$

ger valet $a = b = \frac{1}{2}$ ett konservativt fält.

b. Då $\mathbf{F}$ är konservativt har det en potential $\varphi(x,y)$. Vi kan därför beräkna kurvintegralen m.h.a.

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds = \varphi(T) - \varphi(S),$$

där S och T betecknar start- och slutpunkt på integrationskurvan Γ. Men, eftersom denna är sluten sammanfaller S och T, vilket gör att integralen försvinner.

Svar 13.8 Fältet är konservativt med potential $\varphi(x,y,z) = x^2yz^2 + \sin yz + c$. Alltså, ges integralen av $\varphi(1, \frac{\pi}{4}, 2) - \varphi(0,0,1) = \pi + 1$.

Svar 13.9 Med $s'(t) = (x'(t), y'(t))$ och $ds = s'(t)dt$ fås

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds &= \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(s(t)) \cdot s'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \nabla\varphi(s(t)) \cdot s'(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right) dt = \int_\alpha^\beta \frac{d\varphi}{dt}\,dt = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).\end{aligned}$$