Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C, 2004–03–11

Telefon: Johan Jansson 0740 459022
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng.

Betygsgränser: 3: 25–33p, 4: 34–42p, 5: 43–50. På uppgift 1 krävs minst 5 poäng.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

---

1. Programmet `jacobi.m` är skrivet enligt specifikationen

```
function A=jacobi(f,x)
%   Computes the derivative (Jacobi matrix) A=Df(x) of the function f at x.
%   Syntax:  A = jacobi(f,x)
%   Arguments:
%           f - string containing the name of a function file
%               which returns an mx1 matrix y=f(x).
%           x - an nx1 matrix.
%   Returns:
%           A - an mxn matrix, the Jacobian of f.
```

(a) Skriv en MATLAB/OCTAVE funktionsfil som beräknar divergensen $\nabla \cdot u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}$ av ett vektorfält $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ enligt specifikationen

```
function div=divergence(u,x)
%   Computes the divergence of the vector field u at x.
%   Syntax:   div = divergence(u,x)
%   Arguments:
%           u - string containing the name of a function file
%               which returns an nx1 matrix y=u(x).
%           x - an nx1 matrix.
%   Returns:  div - a real number.
```

Programmet skall beräkna derivatorna genom att anropa `jacobi.m`. Hitta på ett bra test-exempel.

(b) Programmet `SD.m` är:

```
function [x, fmin]=SD(f,x0,tol)
%   Computes a minimum point x of the function f.
%   Syntax:   [x, fmin] = SD(f,x0,tol)
%   Arguments:
%           f   - string containing the name of a function file
%                 which returns a scalar value y=f(x).
%           x0  - an nx1 matrix containing the intial guess.
%           tol - tolerance for the iteration.
%   Returns:
%           x   - nx1 matrix with a minimum point of f.
%           fmin - the value of f at the computed point.
%   Description:
%           The program SD uses the Steepest Descent method by
%           performing fixpoint iteration over the equation
%           x = x - alpha*grad(f) where alpha is a damping factor.
alpha = .01;  grad = (1+tol)/alpha;  x = x0;
while norm(alpha*grad) > tol
  grad = jacobi(f,x);
  x = x - alpha*grad';
end
fmin = feval(f,x);
```

Vänd!

Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(x)
y = x(1)^2 + x(2)^2 ;
```

Redovisa alla beräkningar som programmet gör efter följande:

```
>> f='funk'; tol=0.1; x0=[1;1];
>> [x, fmin] = SD(f,x0,tol)
```

2. Bestäm lokala maxima och minima för funktionen $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 4xy + 3x$.

3. Bestäm alla stationära lösningar till systemet

$$\begin{aligned} X_1' &= -1 - X_1 - X_1X_2, \\ X_2' &= -X_2 + X_1X_2. \end{aligned}$$

Linjärisera kring en av de stationära lösningarna och undersök det linjäriserade systemets stabilitet.

4. Låt $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ 0 \leq x_3 \leq 1\}$ och låt S vara begränsningsytan till Ω med utåtriktad enhetsnormal n. Vi definierar vektorfältet

$$u(x) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ (1 - x_1^2 - x_2^2)x_3^2 \end{bmatrix}$$

och cylindriska koordinater ρ, ϕ, z:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos(\phi), \\ x_2 &= \rho\sin(\phi), \\ x_3 &= z. \end{aligned}$$

Beräkna integralerna (a) $\int_S u \cdot n\, ds$ och (b) $\int_\Omega \nabla \cdot u\, dx$ direkt utan att använda Gauss sats. (c) Vad ger Gauss sats här?

5. (a) Låt $V = S(a_1, \ldots, a_n)$ vara ett underrum till $\mathbf{R}^m$, $n < m$, som genereras av linjärt oberoende vektorer $a_1, \ldots, a_n$, och $b \in \mathbf{R}^m$, $b \notin V$. Beskriv hur vi definierar ortogonala projektionen av b på V och hur man beräknar den. Hur blir det om man har en ON-bas för V?

(b) Beräkna projektionen av $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på rummet V som spänns upp av vektorn $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

`/stig`

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C, 2004–03–11. Lösningar.

---

1. (a)

```
function div=divergence(u,x)
%   Computes the divergence of the vector field u at x.
%   Syntax:
%           div = divergence(u,x)
%   Arguments:
%           u - string containing the name of a function file
%               which returns an nx1 matrix y=u(x).
%           x - an nx1 matrix.
%   Returns:
%           div - a real number.
n=length(x);
A=jacobi(u,x);
div=0;
for i=1:n
 div=div+A(i,i);
end
```

Testexempel: $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $u(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1x_2 \\ x_1x_2x_3 \end{bmatrix}$, $\nabla \cdot u\,(x) = 1 + x_1 + x_1x_2$, funktionsfilen `funk1.m` är

```
function y=funk1(x)
y=[x(1); x(1)*x(2); x(1)*x(2)*x(3)];
```

Kommandot

```
>> div=divergence('funk1',[1;1;1])
```

ger svaret `div=3`.

(b)

$\alpha = 0.01,\ \text{grad} = 1.1/0.01 = 110,\ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

test: $1.1 > 0.1$ ja

$\text{grad} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.01 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 0.98 \end{bmatrix}$

test: $0.02\sqrt{2} \approx 0.028 > 0.1$ nej

$\text{fmin} = 2 \cdot 0.98^2$

Svaret blir $x = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 0.98 \end{bmatrix},\ \text{fmin} = 2 \cdot 0.98^2$

2. Lokala extrempunkter till funktionen $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 4xy + 3x$ ges av ekvationssystemet $f'(x, y) = 0$, dvs

$$f'_x(x, y) = 8x - 4y + 3 = 0$$
$$f'_y(x, y) = 6y - 4x = 0$$

med den enda lösningen $x = -\frac{9}{16}$, $y = -\frac{3}{8}$. Vi har alltså en unik extrempunkt nämligen $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{8})$. Hessematrisen är $f''(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_{\pm} = 7 \pm \sqrt{17} > 0$, dvs matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{8})$ är en minimipunkt. Eftersom det inte finns några andra extrempunkter, så är det ett globalt minimum.

3. Stationära punkter ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -1 - \bar{X}_1 - \bar{X}_1\bar{X}_2 &= 0, \\ -\bar{X}_2 + \bar{X}_1\bar{X}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $\bar{X}_2 = 0$ eller $X_1 = 1$, vilket insatt i den första ekvationen ger $X_1 = -1$ respektive $X_2 = -2$. De enda stationära lösningarna är alltså $\bar{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Linjärisering kring $\bar{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ leder till det linjära systemet $x' = Ax$ med Jacobi-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 - \bar{X}_2 & -\bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 & -1 + \bar{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Eftersom båda är < 0 är systemet asymptotiskt stabilt.

Linjärisering kring $\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ leder till det linjära systemet $x' = Ax$ med Jacobi-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 - \bar{X}_2 & -\bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 & -1 + \bar{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Eftersom ett av dem är > 0 är systemet instabilt.

4. Detta är en cirkulär cylinder.

(a) På mantelytan S_1:

$$\begin{cases} x_1 = \cos(\phi), \\ x_2 = \sin(\phi), \qquad \phi \in [0, 2\pi],\ z \in [0,1]. \\ x_3 = z, \end{cases}$$

Jacobianen är

$$g'(\phi, z) = \begin{bmatrix} g'_\phi, g'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & 0 \\ \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En normalvektor:

$$g'_\phi \times g'_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Utåtriktade enhetsnormalvektorn är

$$n = \pm \frac{g'_\phi \times g'_z}{\|g'_\phi \times g'_z\|} = \frac{g'_\phi \times g'_z}{\|g'_\phi \times g'_z\|} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

och areaelementet $ds = \|g'_\phi \times g'_z\|\, d\phi\, dz = d\phi\, dz$ och $u \cdot n = 0$. Alltså: $\displaystyle\int_{S_1} u \cdot n \, ds = 0$.

På toppytan S_2:

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos(\phi), \\ x_2 = \rho\sin(\phi), \qquad \phi \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0,1]. \\ x_3 = 1, \end{cases}$$

Jacobianen är

$$g'(\rho,\phi) = \begin{bmatrix} g'_\rho, g'_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\rho\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \rho\cos(\phi) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En normalvektor:

$$g'_\rho \times g'_\phi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\rho\sin(\phi) & \rho\cos(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix}.$$

Utåtriktade enhetsnormalvektorn är

$$n = \pm\frac{g'_\rho \times g'_\phi}{\|g'_\rho \times g'_\phi\|} = \frac{g'_\rho \times g'_\phi}{\|g'_\rho \times g'_\phi\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och areaelementet $ds = \|g'_\rho \times g'_\phi\|\,d\rho\,d\phi = \rho\,d\rho\,d\phi$ och $u \cdot n = 1 - \rho^2$. Alltså: $\int_{S_2} u \cdot n\,ds = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1}(1-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (1-\rho^2)\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}$.

På bottenytan S_3:

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos(\phi), \\ x_2 = \rho\sin(\phi), \qquad \phi \in [0, 2\pi],\ \ \rho \in [0,1]. \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

Jacobianen är

$$g'(\rho,\phi) = \begin{bmatrix} g'_\rho, g'_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\rho\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \rho\cos(\phi) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Utåtriktade enhetsnormalvektorn är

$$n = \pm\frac{g'_\rho \times g'_\phi}{\|g'_\rho \times g'_\phi\|} = -\frac{g'_\rho \times g'_\phi}{\|g'_\rho \times g'_\phi\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och areaelementet $ds = \|g'_\rho \times g'_\phi\|\,d\rho\,d\phi = \rho\,d\rho\,d\phi$ och $u \cdot n = 0$ ty $u_3 = 0$. Alltså: $\int_{S_3} u \cdot n\,ds = 0$.

Alltså: $\int_S u \cdot n\,ds = \frac{\pi}{2}$.

(b) $\nabla \cdot u = 2(1-\rho^2)z$. För cylinderkoordinater blir Jacobianen

$$g'(\rho,\phi,z) = \begin{bmatrix} g'_\rho, g'_\phi, g'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\rho\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \rho\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Volymselementet: $dx = |\det(g'(\rho,\phi,z))|\,d\rho\,d\phi\,dz = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$ och

$$\int_\Omega \nabla \cdot u\,dx = \int_{z=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1} 2(1-\rho^2)z\rho\,d\rho\,d\phi\,dz = 2\int_0^1 z\,dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (1-\rho^2)\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Gauss sats: $\int_S u \cdot n\,ds = \int_\Omega \nabla \cdot u\,dx = \frac{\pi}{2}$.

5. (a) Se boken och föreläsningsanteckningar. $Pb = B(B^TB)^{-1}B^Tb$ med basen $B = \begin{bmatrix} a_1, & \dots, & a_n \end{bmatrix}$. $Pb = QQ^Tb$ med ON-basen $Q = \begin{bmatrix} g_1, & \dots, & g_n \end{bmatrix}$.

(b) Normera v: $\hat{v} = v/\|v\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. Vi har nu en ON-bas $Q = \hat{v}$ och får

$$Pb = QQ^T b = \hat{v}\hat{v}^T b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Detta kan även uttryckas $Pb = (b, \hat{v})\hat{v} = \dfrac{(b, v)}{\|v\|^2}v$.

/stig