Intro Math K + Kb + Kf

Lecture 3:

Rationella tal

AMB&S chap 7

Översikt

- varför rationella tal
- konstruktion
- räkneregler
- decimalform
- varia

Varför?

- Behöver modell för x sådant att $3\,x = 2$, t.ex.
- Finns inget *heltal* x med denna egenskap!

Konstruktion

- Ny typ av “tal” i form av ordnade par av heltal
- Kan skrivas på formen (p, q), p/q eller $\frac{p}{q}$, bl.a.
- Dvs m.h.a två heltal p och q, med karaktäristiska positioner.
- (p, q) (eller $\frac{p}{q}$) avsett att lösa $q\,x = p$.

Räkneregler

- multiplikation: $\underbrace{(p,\ q)}_{=x} \times \underbrace{(r,\ s)}_{=y} = (p\,r,\ q\,s)$
- varför?
- jo, eftersom $q\,x = p$ och $s\,y = r$ så vill vi att $q\,s\,x\,y = p\,r$, dvs $x\,y = (p\,r,\ q\,s)$

Räkneregler, forts

- addition: $\underbrace{(p,\ q)}_{=x} + \underbrace{(r,\ s)}_{=y} = (p\,s + r\,q,\ q\,s)$
- varför?
- jo, därför att $q\,x = p$ och $s\,y = r$ medför att $q\,s\,x + q\,s\,y = p\,s + q\,r$, dvs $q\,s\,(x + y) = p\,s + q\,r$, dvs $x + y = (p\,s + q\,r,\ q\,s)$

Utvidgning, identifikation

- rationella tal av typ $(p,\,1)$ eller $\frac{p}{1}$ funkar som p självt, dvs kan ses som heltal, dvs de nya rationella talen omfattar, eller är en utvidgning av, heltalen
- vidare, eftersom $q\,x = p$ om och endast om $s\,q\,x = s\,p$ för $s \neq 0$, leds vi att se $(p,\,q)$ och $(s\,p,\,s\,q)$ som representanter för ett och samma tal, och skriver t.ex. att $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

division, dubbelbråk

- eftersom $(r,\ s)\,x = (p,\ q)$ har lösning $x = (p\,s,\ r\,q)$ skriver vi att $(p,\ q)/(r,\ s) = (p\,s,\ r\,q)$, dvs $\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{p\,s}{r\,q}$

Ordning

- Säger att $(p, q) > 0$ om p och q har samma tecken.
- Säger att $(p, q) > (r, s)$ om $(p, q) - (r, s) > 0$.
- Följer även att $-(p, q) = (-p, q) = (p, -q)$. Varför?

Koll

Nu lätt att kolla att $(p,\, q)$ löser ekvationen $q\, x = p$, dvs att $(q,\, 1)\,(p,\, q) = (q\, p,\, q\, 1) = (p,\, 1)$.

Definierar:

- x^n som förut
- $x^{-n} = 1/x^n$
- t.ex. $(p,\, q)^{-2} = (1,\, 1)/(p,\, q)^2 = (1,\, 1)/(p^2,\, q^2) = (q^2,\, p^2)$
- t.ex. $10^{-2} = (10,\, 1)^{-2} = (1,\, 100)$

Decimalform

Rationella tal kan även skrivas på decimalform:
$(53,\ 4) = 13.25 = 1\,10^1 + 2\,10^0 + 3\,10^{-1} + 5\,10^{-2}$,
$(2,\ 3) = 0.66666666...$, $(2,\ 11) = 0.1818181818....$

- rationella tal har ändlig eller periodisk decimalutveckling, och vice versa!

Periodisk är rationell

- Klart att ändlig decimalutveckling ger ett rationellt tal, t.ex. $13.25 = (1325, 100)$.
- Periodisk ger rationell enl. följande argument: $x = 0.181818..$ ger att $100x - x = 99x = 18$ dvs $x = (18, 99)$.
- ändlig kan också ses som periodisk! Ex: $2.5 = 2.50000000...$

Rationell är periodisk

- ty finns bara ändligt många “rester” som kan uppstå vid division. Exempel: $13/7$ ger decimalutvecklingen $1.857142\,857142\,85\ldots$