TMA195 Analys och linjär algebra Kf Kb, del B, 2001–09–01. Lsningar.

---

1. (a) Se boken.

(b)

$$\begin{aligned} g(x) &= -\tfrac{1}{2}\int_0^x y^2(-2y\exp(-y^2))\,dy = -\tfrac{1}{2}\int_0^x y^2\frac{d}{dy}\exp(-y^2)\,dy \\ &= -\tfrac{1}{2}\Big[y^2\exp(-y^2)\Big]_0^x + \int_0^x y\exp(-y^2)\,dy \\ &= -\tfrac{1}{2}x^2\exp(-x^2) - \tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{d}{dy}\exp(-y^2)\,dy \\ &= -\tfrac{1}{2}x^2\exp(-x^2) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\exp(-x^2) = \tfrac{1}{2}\Big(1-(1+x^2)\exp(-x^2)\Big). \end{aligned}$$

(c) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{1}{2}$.

2. (b)

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \cos(y)\,dy = \Big[\sin(y)\Big]_0^x = \sin(x), & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^x 0\,dy = 1, & x \ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(c)

$$\bar{f} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(y)\,dy = \frac{1}{\pi}F(\pi) == \frac{1}{\pi}.$$

(d) Medelvrdessatsen sger att det finns minst en punkt $\bar{x} \in [0,\pi]$ sdan att $f(\bar{x}) = \bar{f} = \frac{1}{\pi}$.

3. Differentialekvationen är separabel:

$$\begin{aligned} -\frac{du}{u^3} &= k \\ \int_{u_0}^{u(T)} \frac{-1}{u^3}\,du &= k\int_0^T dt \\ \left[\frac{1}{2u^2}\right]_{u_0}^{u(T)} &= kT \\ \frac{1}{u(T)^2} &= 2kT + \frac{1}{u_0^2} \\ u(T)^2 &= \frac{u_0^2}{1+2kTu_0^2} \\ u(T) &= \pm\sqrt{\frac{u_0^2}{1+2kTu_0^2}} = \frac{u_0}{\sqrt{1+2kTu_0^2}}, \end{aligned}$$

där vi i sista steget använde att koncentrationen är positiv. Halveringstiden fås genom att sätta in $u(T_{1/2}) = \frac{1}{2}u_0$:

$$\tfrac{1}{2}u_0 = \frac{u_0}{\sqrt{1+2kT_{1/2}u_0^2}}, \qquad T_{1/2} = \frac{3}{2ku_0^2}.$$

4. (a) $R(A)$ är mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A, dvs

$$R(A) = \{y \in \mathbf{R}^4 : Ax = y, \text{ för något } x \in \mathbf{R}^4\}.$$

(b) Vi lägger till b och c som extra kolonner i A:

$$\begin{bmatrix} A\ b\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Gauss eliminationsmetod leder till en trappstegsmatris:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}\ \hat{b}\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet $Ax = b$ är alltså ekvivalent med systemet $\hat{A}x = \hat{b}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

med lösningarna $x_4 = s$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1 - 2x_3 - 3x_4 = 1 - 3s$, $x_1 = 3 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 + 2s$, där s är godtycklig, dvs

$$x = \begin{bmatrix} 1+2s \\ 1-3s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet $Ax = c$ är ekvivalent med systemet $\hat{A}x = \hat{c}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -\tfrac{2}{5}, \\ x_3 &= \tfrac{2}{5}, \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

vilket saknar lösning.

(c) Resultatet i (b) visar att b men inte c tillhör $R(A)$.

(d) De tre första kolonnerna i trappstegsmatrisen $\hat{A}$ är linjärt oberoende och utgör en bas för dess värderum $R(\hat{A})$. Då utgör de tre första kolonnerna i A också en bas för dess värderum $R(A)$. Dvs vektorerna

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

är en bas för $R(A)$. Dess dimension är 3, vilket är detsamma som rangen för A.

5. (a), (b), (c) se boken.

(d) Vi använder högra respektive vänstra rektangelregeln med steget $h = 1$ för att approximera integralen $\log(4) = \int_1^4 x^{-1}\,dx$. Vi får

$$1 < \frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \log(4) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} < 2.$$

/stig