Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2004–12–16

Telefon: Erik Svensson 0739 779268 (Stig Larsson 0733 409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

1. Vilka steg ingår i beviset av fundamentalsatsen?

2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^x y\log(y)\,dy$.

3. Redogör för hur man beräknar integralen i uppgift 2 med programmet `my_ode` för $x \in [1,5]$. Ange alla detaljer: m-fil, MATLAB-kommando.

4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx$.

5. Ange Taylors polynom av grad 7 för funktionen $\sin(x)$ i punkten $\bar{x} = 0$.

6. Programmet `my_trig.m` är

```
function [t,W]=my_trig(int,w0,h)
  a=int(1);
  b=int(2);
  A=[0 1;-1 0];
  i=1;
  t(1)=a;
  W(:,1)=w0;
  while t(i)<b
    i=i+1;
    t(i)=t(i-1)+h;
    W(:,i)=W(:,i-1)+h*A*W(:,i-1);
  end
  t=t';
  W=W';
```

Skriv ned alla beräkningar som programmet gör efter följande:

```
>> I=[0 0.1]; h=1e-1; u0=[1;0];
>> [x,U]=my_trig(I,u0,h);
```

7. Lös analytiskt begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t) - 5u(t) = 3, \\ u(0) = 2. \end{cases}$

Vänd!

8. Lös begynnelsevärdesproblemet $u''(t) + 16u(t) = 0, \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 2.$

9. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t) = -3u(t)^4, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

10. Välj en passande beteckning till var och en av dessa 6 ekvationer. Använd följande beteckningar: *Icke-linjär. Linjär homogen. Linjär inhomogen.*

1. $u' + 3u^2 = 0$ 2. $u' + 3u = 0$ 3. $u' + 3u = 5$

4. $u'' + 2u' + u = \sin(t)$ 5. $u'' + 2u' + u = \sin(u)$ 6. $u'' + uu' + 2u = 0$

---

11. Låt

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Är vektorerna a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 linjärt oberoende?

(b) Hur definieras det linjära rummet $S(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ som genereras av de givna vektorerna?

(c) Bestäm en bas för rummet $S(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Bestäm dess dimension.

12. Betrakta följande kemiska reaktioner:

$$2\mathrm{NO} \underset{k_{12}}{\overset{k_{11}}{\rightleftharpoons}} \mathrm{N_2O_2}$$

$$\mathrm{N_2O_2} + \mathrm{O_2} \underset{k_{22}}{\overset{k_{21}}{\rightleftharpoons}} 2\mathrm{NO_2}$$

(a) Skriv ned uttryck för de fyra reaktionshastigheterna.

(b) Skriv ned bildningshastigheterna för de inblandade ämnena.

(c) Skriv en m-fil för lösning av dessa differentialekvationer med programmet `my_ode`.

13.

(a) Hur definierar vi funktionerna $\log(x)$ och $\exp(x)$ i denna kurs? Ange deras definitionsmängder och värdemängder.

(b) Visa utgående från definitionerna att $\log(\exp(x)) = x$ för alla x. Vad betyder detta för ekvationen $\exp(x) = y$?

(c) Hur definieras $\exp(z)$ för komplext tal $z = x + iy$?

(d) Lös ekvationen $z^3 = i$.

`/stig`

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2004–12–16. Lösningar.

---

1. 1. Vi konstruktionerar en följd $U^n(x)$ enligt algoritmen: $U^n(x_i^n) = U^n(x_{i-1}^n) + h_n f(x_{i-1}^n)$.
2. Vi visar konvergens: $U^n(x)$ är en Cauchy-följd med gränsvärde $u(x)$.
3. Vi visar att u löser begynnelsevärdesproblemet.
4. Vi visar entydighet: begynnelsevärdesproblemet har bara en lösning.

2. $\dfrac{x^2}{2}\log(x) - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4}$.

3. Matlab funktionsfil:

```
function y=funk(x,u)
y=x*log(x);
```

Matlab kommando:

```
>> [x,U]=my_ode('funk',[1, 5],0,1e-2);  plot(x,U)
```

4. $\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = \left\{t = x^2,\ dt = 2x\,dx\right\} = \frac{1}{2}\int_0^4 e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-4})$.

5. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

6. $a = 0,\ b = 0.1,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ i = 1,\ t(1) = 0,\ W(:,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

test: $t(1) = 0 < b = 0.1$ sant

$i = 2,\ t(2) = 0.1,\ W(:,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$

test: $t(2) = 0.1 < b = 0.1$ falskt

Nu stoppar loopen och vi har nu: $t = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}$

Till sist transponeras matriserna: $t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}$

Svaret blir $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}$

7. $u(t) = 2e^{5t} + \int_0^t e^{5(t-s)}3\,ds = 2e^{5t} + \frac{3}{5}(e^{5t} - 1)$

8. $u(t) = \frac{1}{2}\sin(4t)$

9. $u(t) = \frac{u_0}{\left(1+9u_0^3 t\right)^{1/3}}$

10. 1. icke-linjär. 2. linjär homogen. 3. linjär inhomogen. 4. linjär inhomogen. 5. icke-linjär. 6. icke-linjär.

---

11. Låt

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Testet för linjärt oberoende är

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5 = 0,$$

dvs ekvationssystemet $Ax = 0$. Gauss-elimination till radreducerad trappstegsform ger

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet $\hat{A}x = 0$ är

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 + x_4 \quad &= 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \quad &= 0 \\ x_5 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

med lösningarna

$$x = s \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s, t \text{ är godtyckliga tal.}$$

Ekvationssystemet $Ax = 0$ har samma lösningar. Det finns alltså många icke-triviala lösningar och vi drar slutsatsen att vektorerna $a_1, \ldots, a_5$ inte är linjärt oberoende.

(b) Det linjära rummet $S(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ består av alla linjära kombinationer $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5$ av de givna vektorerna.

(c) Pivotkolonnerna, dvs kolonn nr 1, 2 och 5, i $\hat{A}$ är linjärt oberoende och en bas för $R(\hat{A})$. Då är kolonn nr 1, 2 och 5 i A en bas för $R(A)$, dvs för $S(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Dvs $S(a_1, a_2, a_5) = S(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ och $\{a_1, a_2, a_5\}$ är en bas. Rummets dimension är 3.

12. (a) Reaktionshastigheterna är

$$\begin{aligned} r_{11} &= k_{11}[\mathrm{NO}]^2 && = k_{11} u_1^2, \\ r_{12} &= k_{12}[\mathrm{N_2O_2}] && = k_{12} u_3, \\ r_{21} &= k_{21}[\mathrm{N_2O_2}]\,[\mathrm{O_2}] && = k_{21} u_3 u_2, \\ r_{22} &= k_{22}[\mathrm{NO_2}]^2 && = k_{22} u_4^2, \end{aligned}$$

med variablerna

$$u_1 = [\mathrm{NO}],\; u_2 = [\mathrm{O_2}],\; u_3 = [\mathrm{N_2O_2}],\; u_4 = [\mathrm{NO_2}].$$

(b) Bildningshastigheterna är

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -2r_{11} + 2r_{12}, \\ \dot{u}_2 &= -r_{21} + r_{22}, \\ \dot{u}_3 &= r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}, \\ \dot{u}_4 &= 2r_{21} - 2r_{22}. \end{aligned}$$

(c)

```
function y=no2(t,u)
% Oxidation of NO to NO2.
% Atkins and Jones, second edition, pp. 720-721.
% [t,u]=ode_cg1('no2', [0, 300], [.5; 1; 0; 0],.001);
% [t,u]=my_ode('no2', [0, 20], [.5; 1; 0; 0],.01);

global k11 k12 k21 k22

% reaction rates
r11=k11*u(1)^2;
r12=k12*u(3);
r21=k21*u(2)*u(3);
r22=k22*u(4)^2;

s1=0; s2=0;  % source terms

y=zeros(size(u));

% rates of formation
y(1)=-2*r11+2*r12+s1;  % NO
y(2)=-r21+r22+s1;      % O2
y(3)=r11-r12-r21+r22;  % N2O2
y(4)=2*r21-2*r22;      % NO2
```

13. (a) För $x \geq 1$ definieras $v(x) = \log(x)$ som den unika lösningen till

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{x}, \quad x \geq 1, \\ v(1) &= 0. \end{aligned}$$

dvs $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{y}\,dy$. För $0 < x < 1$ definieras $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{y}\,dy = -\int_x^1 \frac{1}{y}\,dy$. Definitionsmängden är $\{x : x > 0\}$ och värdemängden är $\mathbf{R}$.

För $x \geq 0$ definieras $u(x) = \exp(x)$ som den unika lösningen till

$$\begin{aligned} u'(x) &= u(x), \quad x \geq 0, \\ u(0) &= 1. \end{aligned}$$

För $x < 0$ definieras $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$. Definitionsmängden och värdemängden för exp är $\mathbf{R}$.

(b) Sätt $w(x) = \log(\exp(x))$. Då gäller $w'(x) = \frac{1}{\exp(x)} \exp(x) = 1$ och $w(0) = \log(\exp(0)) = 0$, dvs

$$w'(x) = 1, \quad w(0) = 0.$$

Den unika lösningen till detta begynnelsevärdesproblem är $w(x) = x$. Alltså: $\log(\exp(x)) = x$. Detta betyder att ekvationen $\exp(x) = y$ har unika lösningen $x = \log(y)$ för alla $y > 0$, dvs inversen $\exp^{-1}(y) = \log(y)$.

(c) $\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$.

(d) Polär representation $z = re^{i\theta}$ och $i = e^{i\pi/2}$ ger $r^3 e^{3i\theta} = e^{i\pi/2}$, dvs $r = 1,\ \theta = \pi/6 + n2\pi/3$. Med $n = 0, 1, 2$ får vi alla tre lösningarna:

$$z = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z = e^{i\pi/6 + i2\pi/3} = e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad z = e^{i\pi/6 + i4\pi/3} = e^{i3\pi/2} = -i.$$

/stig