Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2005–04–02

Telefon: Erik Svensson 0739 779268 (Stig Larsson 0733 409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

1. Vilka steg ingår i beviset av fundamentalsatsen?

2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^x y^2 \log(y)\, dy$.

3. Redogör för hur man beräknar integralen i uppgift 2 med programmet `my_ode` för $x \in [1, 5]$. Ange alla detaljer: m-fil, Matlab-kommando.

4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{x+3}\, dx$. För vilka t är integralen definierad?

5. Ange Taylors polynom av grad 8 för funktionen $\cos(x)$ i punkten $\bar{x} = 0$.

6. Programmet `my_trig.m` är

```
function [t,W]=my_trig(int,w0,h)
  a=int(1);
  b=int(2);
  A=[0 1;-1 0];
  i=1;
  t(1)=a;
  W(:,1)=w0;
  while t(i)<b
    i=i+1;
    t(i)=t(i-1)+h;
    W(:,i)=W(:,i-1)+h*A*W(:,i-1);
  end
  t=t';
  W=W';
```

Skriv ned alla beräkningar som programmet gör efter följande:

```
>> I=[0 0.1]; h=1e-1; u0=[1;0];
>> [x,U]=my_trig(I,u0,h);
```

7. Lös analytiskt begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t) + 3u(t) = 5, \\ u(0) = 2. \end{cases}$

Vänd!

8. Lös begynnelsevärdesproblemet $u''(t) + 16u(t) = 0, \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 2.$

9. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u' = u(1-u), \quad t > 0, \\ &u(0) = u_0. \end{aligned}$$

10. Ge ett exempel vardera av följande typer av differentialekvationer:

1. Icke-linjär.
2. Linjär homogen av första ordningen.
3. Linjär inhomogen av andra ordningen.

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

(a) Lös ekvationssystemet $Ax = 0$.

(b) Vad menas med nollrummet till en matris? Bestäm nollrummet till A.

(c) Beräkna $\det(A)$. Är A singulär?

(d) Är kolonnerna i A linjärt beroende?

12. (a) Lös (analytiskt) begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u'' - 2u' + 17u = 0, \quad t > 0, \\ &u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1. \end{aligned}$$

(b) Antag att $u_0 = u_1$. Rita grafen till u. Visa att $|u(t)| \leq e^t |u_0|$.

(c) Beskriv hur man går tillväga för att lösa begynnelsevärdesproblemet med hjälp av det MATLAB-program som du själv skrivit.

13. Betrakta det allmänna begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \\ u(a) = u_a. \end{cases}$$

(a) Skriv ned Eulers metod för approximativ beräkning av lösningen.

(b) Skriv ned mittpunktsmetoden för approximativ beräkning av lösningen.

(c) Mittpunktsmetoden kallas “implicit”. Vad menas med detta? Vilken extra svårighet leder detta till när man implementerar metoden i ett datorprogram?

`/stig`

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2005–04–02. Lösningar.

---

1. 1. Vi konstruktionerar en följd $U^n(x)$ enligt algoritmen: $U^n(x_i^n) = U^n(x_{i-1}^n) + h_n f(x_{i-1}^n)$.
2. Vi visar konvergens: $U^n(x)$ är en Cauchy-följd med gränsvärde $u(x)$.
3. Vi visar att u löser begynnelsevärdesproblemet.
4. Vi visar entydighet: begynnelsevärdesproblemet har bara en lösning.

2. $\dfrac{x^3}{3}\log(x) - \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{1}{9}$.

3. Matlab funktionsfil:

```
function y=funk(x,u)
y=x^2*log(x);
```

Matlab kommando:

```
>> [x,U]=my_ode('funk',[1, 5],0,1e-2);  plot(x,U)
```

4.

$$\int_0^t \frac{1}{x+3}\,dx = \Big[\log(x+3)\Big]_0^t = \log(t+3) - \log(3) = \log\left(\frac{t+3}{3}\right), \quad \text{för } t > -3$$

5. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$

6. $a = 0,\ b = 0.1,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ i = 1,\ t(1) = 0,\ W(:,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
test: $t(1) = 0 < b = 0.1$ sant
$i = 2,\ t(2) = 0.1,\ W(:,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$
test: $t(2) = 0.1 < b = 0.1$ falskt
Nu stoppar loopen och vi har nu: $t = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}$
Till sist transponeras matriserna: $t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}$
Svaret blir $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}$

7. $u(t) = 2e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-s)} 5\,ds = 2e^{-3t} - \frac{5}{3}(e^{-3t} - 1)$

8. $u(t) = \frac{1}{2}\sin(4t)$

9. $u(t) = \dfrac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-t}}$

10. Icke-linjär: $u' + 3u^2 = 0$. Linjär homogen av första ordningen: $u' + 3u = 0$. Linjär inhomogen av andra ordningen: $u'' + 2u' + u = \sin(t)$.

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

(a) För att lösa $Ax = 0$ omvandlar vi matrisen A till trappstegsform med hjälp av Gauss eliminationsmetod. Vi får

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

Vi löser det ekvivalenta ekvationssystemet $\hat{A}x = 0$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lösningen är $x = 0$.

(b) Nollrummet är $N(A) = \{x \in \mathbf{R}^4 : Ax = 0\}$, dvs mängden av alla lösningar till ekvationssystemet $Ax = 0$. Del (a) visar att $N(A) = \{0\}$.

(c) Räkningarna i (a) visar direkt: $\det(A) = \det(\hat{A}) = 1 \cdot (-4) \cdot 2 \cdot (-1) = 8 \neq 0$. (Obs att vi har inte brutit ut några tal vid beräkningen av $\hat{A}$.) Då är A icke-singulär.

(d) Trappstegsformen i del (a) visar att kolonnerna är linjärt oberoende.

12. (a) Ekvationen är $(D^2 - 2D + 17)u = 0$. Karakteristiska ekvationen är $r^2 - 2r + 17 = 0$ med rötterna $r_1 = 1 + 4i$, $r_2 = 1 - 4i$. Lösningen blir

$$\begin{aligned} u(t) &= e^t\big(A\cos 4t + B\sin 4t\big), \\ u'(t) &= e^t\big(A\cos 4t + B\sin 4t\big) + 4e^t\big(-A\sin 4t + B\cos 4t\big). \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{aligned} u_0 &= u(0) = A, \\ u_1 &= u'(0) = A + 4B, \end{aligned}$$

dvs $A = u_0$, $B = \frac{1}{4}(u_1 - u_0)$. Således

$$u(t) = e^t\big(u_0\cos 4t + \tfrac{1}{4}(u_0 - u_1)\sin 4t\big).$$

(b) Med $u_0 = u_1$ fås $u(t) = e^t u_0 \cos 4t$ och

$$|u(t)| = e^t|u_0|\,|\cos 4t| \leq e^t|u_0|.$$

Se figuren på nästa sida. Den heldragna kurvan är grafen till u och de streckade kurvorna visar begränsningen $|u(t)| \leq e^t|u_0|$.

(c) Man skriver differentialekvationen som ett system av första ordningen: $v_1 = u$, $v_2 = u'$ och

$$v' = Av,\ v(0) = v_0; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -17 & 2 \end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

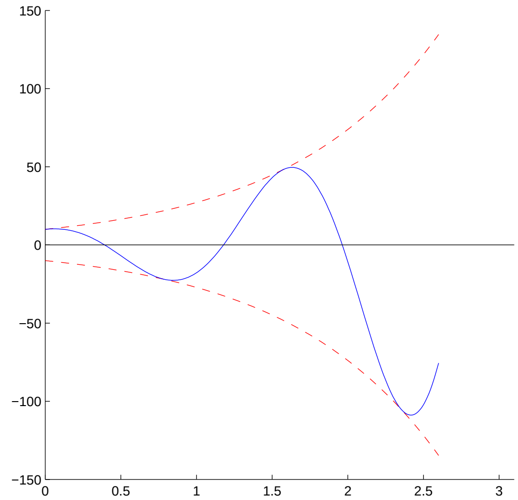
Man skriver sedan en m-fil kallad `funk.m`:

```
function yprime=funk(t,x)
yprime=[0 1; -17 2]*x;
```

och exekverar man matlabkommandot

```
>> [t,x]=my_ode('funk',[0;10],[1;2],.01);
```

där `[0;10]` anger ett tidsintervall, `[1;2]` är begynnelsevärdena och `.01` är steglängden.



FIGUR 1. $u(t) = u_0 e^t \cos 4t$

13. Se boken.

`/stig`