Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2006–08–29

Telefon: Mattias Sunden: 0317728294 och 0730792979
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiska Vetenskaper utanför sal FL 22.

1. Formulera integralkalkylens fundamentalsats.

2. Beräkna med hjälp av variabelsubstitution integralen $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

3. Använd partiell integration för att beräkna $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin(x)\,dx$.

4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{3+x^4}\,dx$.

5. Ange Taylors polynom av ordning 3 för funktionen $f(x)=\sqrt{1+x}$ i punkten $\bar{x}=0$.

6. Programmet `my_ode.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
% my_ode - solves initial value problem u'=f(t,u), a<t<b; u(a)=ua.
%   Syntax: [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
%   Arguments: f    - string containing the names of a function file
%              int  - 1x2 matrix specifying a time interval int =[a,b]
%              ua   - dx1 matrix specifying an initial value
%              h    - positive number, the stepsize
%   Returns:   t    - nx1 matrix containing the time points with t(1)=a
%              U    - nxd matrix containing the approximate solution
```

Filen funk.m innehåller:

```
function y=funk(t,x)
A=[0 1;-1 0];
y=A*x;
```

Vilka värden har x och U efter följande:

```
>> f='funk' , I=[0 0.1]; h=1e-1; u0=[1;0];
>> [x,U]=my_ode(f, I,u0,h);
```

7. Lös analytiskt begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t)-2u(t)=t, \\ u(0)=1. \end{cases}$

Vänd!

8. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) + u(t) = g; \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad g \text{ är konstant.}$$

9. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) + u(t) = \cos t; \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

10. Lös begynnelsevärdesproblemet för $t \geq 1$,

$$2u(t) + tu'(t) = 4t^2, \qquad u(1) = 0.$$

---

11. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Vad menas med värderummet $R(A)$ till A?
(b) Lös ekvationerna $Ax = b$ och $Ax = c$.
(c) Tillhör b och c värderummet $R(A)$?
(d) Ange en bas till $R(A)$ och en bas till nollrummet $N(A)$.

12. (a) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definieras av

$$f(w) = \begin{bmatrix} -2(w_1 + 1) + w_2 e^{w_1} \\ w_2 + w_2 e^{w_1} \end{bmatrix}.$$

Lös (analytiskt) ekvationen $f(w) = 0$.
(b) Beräkna Jacobi-matrisen $f'(w)$.
(c) Genomför första steget i Newtons metod för ekvationen $f(w) = 0$ med startvektor $w^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

13. (a) Beskriv hur vi definierar (konstruerar) logarithmfunktionen $\log(x)$.
(b) Räkna upp logariythmens viktigaste egenskaper. Ange dess definitionsmängd och värdesmängd.
(c) Använd definitionen för att bevisa någon av logarithmens egenskaper.
(d) Använd definitionen för att bevisa den grova uppskattningen $1 < \log(4) < 2$.

MA

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2006–08–29. Lösningar.

---

1. Se Boken!

2.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \Big[t = \ln x, dt = \frac{1}{x}dx,\ x = 1 \Rightarrow t = 0,\ x = e \Rightarrow t = 1\Big] = \int_0^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2\sin(x)\,dx &= \Big[x^2(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 2x(-\cos x)\,dx\\ &= \Big[-x^2\cos x + 2x\sin x\Big]_0^\pi - 2\int_0^\pi \sin x\,dx\\ &= \Big[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\Big]_0^\pi = \pi^2 - 4.\end{aligned}$$

4.

$$\int_0^1 \frac{x^3}{3+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\Big[\ln(3+x^4)\Big]_0^1 = \frac{1}{4}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}.$$

5.

$$f(x) = (1+x)^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \Rightarrow f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}.$$

Därför är $f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{1}{2}\ f''(0) = -\frac{1}{4},\ f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$. Insättning i Taylors polynom av ordning 3 och med $\bar{x} = 0$:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3,$$

ger

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$$

6.

```
x=[0;0.1],  U=[1 0; 1 -0.1].
```

7. Integrerande faktorn är e^{-2t}. Vi multiplicerar båda leden med e^{-2t}. Differentialekvationen går nu att skriva som

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-2t}u(t)\Big) = e^{-2t}t \qquad \text{dvs} \quad e^{-2t}u(t) = \int e^{-2t}t\,dt + C.$$

Med partiell integration har vi

$$\int e^{-2t}t\,dt = \frac{e^{-2t}}{-2}t - \int \frac{e^{-2t}}{-2}\,dt = -\frac{e^{-2t}}{2}t - \frac{e^{-2t}}{4},$$

dvs $u(t) = Ce^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$ där $u(0) = 1$ ger $1 = C - \frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{5}{4}$. Alltså lösningen är

$$u(t) = \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}.$$

8. $u_p(t) = g$ är en partikulärlösning. Allmänna homogen lösningen är av formen $u_h(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t$. Därför har alla lösningar till ekvationen utseendet

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) == K_1 \cos t + K_2 \sin t + g.$$

Begynnelevillkor $u(0) = 1 \Rightarrow K_1 + g = 1$ och $u'(0) = 0 \Rightarrow K_2 = 0$. Alltså lösningen är

$$u(t) = (1 - g) \cos t + g.$$

9. Ansätt en partikulärlösning

$$u_p(t) = t(A \cos t + B \sin t).$$

Då är

$$\begin{aligned}
u_p'(t) &= A \cos t + B \sin t + t(-A \sin t + B \cos t) \\
u_p''(t) &= -A \sin t + B \cos t + (-A \sin t + B \cos t) \\
&\quad t(-A \cos t - B \sin t) \\
u_p''(t) + u_p(t) &= -2A \sin t + 2B \cos t = \cos t.
\end{aligned}$$

Identifiering av koefficienter ger $A = 0$ och $B = 1/2$. Alltså är

$$u_p(t) = \frac{1}{2} t \sin t.$$

Allmänna homogen lösningen är av formen $u_h = K_1 \cos t + K_2 \sin t$. Lösningen till ekvationen är då

$$u(t) = u_p(t) + u_h(t) = \frac{1}{2} t \sin t + K_1 \cos t + K_2 \sin t.$$

Begynnelevillkor $u(0) = 1 \Rightarrow K_1 = 1$ och $u'(0) = 0 \Rightarrow K_2 = 0$. Slutligen har vi

$$u(t) = \frac{1}{2} t \sin t + \cos t.$$

10. Vi dividerar med $t \neq 0$ och skriver om ekvationen som

$$u'(t) + \frac{2}{t} u(t) = 4t, t \neq 0.$$

Vi beräknar integrerande faktorn:

$$\int \frac{2}{t}\, dt = \ln t^2 \quad \Longrightarrow \quad \text{I.F.} = e^{\ln t^2} = t^2.$$

Vi multiplicerar den omskrivna ekvationen med I.F. och får

$$t^2 u'(t) + 2t u(t) = 4t^3 \quad \Longrightarrow \quad t^2 u(t) = \int 4t^3\, dt + C.$$

Dvs

$$t^2 u(t) = t^4 + C \quad \Longrightarrow \quad u(t) = t^2 + C t^{-2}.$$

Begynnelsevillkor $u(1) = 0 \Longrightarrow C = -1$. Alltså lösningen är

$$u(t) = t^2 - t^{-2}.$$

11. (a) Se boken. Resonemanget bygger på att de linjär oberoende kolonner i A (pivot kolonner) spänner ett vekorrum. Detta består av alla vektorer b för vilka $Ax = b$ har lösning. Rummet kallas värderummet och betecknas $R(A)$. Om $typ(A) = m \times n$, så är $R(A) \subset R^m$. $dimV(R)$= antal pivot ($\neq 0$) element.

(b) Vi lägger till b och c som extra kolonner i A:

$$[A\ b\ c] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gauss eliminationsmedtod leder till en trappstegsmatris

$$[\hat{A}\ \hat{b}\ \hat{c}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet $Ax = b$ är alltså ekvivalent med $\hat{A}x = \hat{b}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 4, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2, \\ x_3 &= 1, \end{aligned}$$

med lösningarna $x_4 = s,\ x_3 = 1,\ x_2 = -3s,\ x_1 = 1 + 2s$, där s är godtycklig, dvs

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet $Ax = c$ är alltså ekvivalent med $\hat{A}x = \hat{c}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3, \\ x_3 &= 1, \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

vilket saknar lösning.

(c) Resultatet i (b) visar att b men inte c tillhör $R(A)$.

(d) De tre första kolonnerna i trapstegsmatrisen $\hat{A}$ är linjär oberoende och utgör en bas för dess värderum $R(\hat{A})$. Då utgör de tre första kolonnerna i A också en bas för dess värderum $R(A)$. Dvs vektorerna

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En bas för nullrummet $N(A)$ fås genom att lösa $Ax = 0$ som är ekvivalent med $\hat{A}x = 0$. Dvs

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_3 &= 0, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

med lösningarna $x_4 = s$, $x_3 = 0$, $x_2 = -3s$, $x_1 = 2s$. Alltså vektorn

$$v_n = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

är en bas för nullrummet $N(A)$.

12. (a) Ekvationen $f(w) = 0$ betyder

$$\begin{aligned} -2(w_1 + 1) + w_2 e^{w_1} &= 0 \\ w_2 + w_2 e^{w_1} &= 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $w_2 = 0$, den första ger sedan $w_1 = -1$. Det finns alltså en enda lösning $\bar{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Jacobi-matrisen är

$$f'(w) = \begin{bmatrix} -2 + w_2 e^{w_1} & e^{w_1} \\ w_2 e^{w_1} & 1 + e^{w_1} \end{bmatrix}.$$

(c) Första steget i Newtons metod:

evaluera: $A = f'(w^{(0)}) = f'(0,1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad b = -f(w^{(0)}) = -f(0,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$,

Lös ekvationen $Ah = b$: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow h^{(0)} = \begin{bmatrix} -4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$,

uppdatera: $w^{(1)} = w^{(0)} + h^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$,

vi kom lite närmare $\bar{w}$!

13. (a) , (b), (c) se boken.

(d) Vi använder högra respektive vänstra rektangelregeln med steget $h = 1$ för att approximera integralen $\log(4) = \int_1^4 x^{-1}\, dx$. Vi får

$$1 < \frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \log(4) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} =< \frac{11}{6} < 2.$$

MA