Flervariabelövningar

Fredrik Bengzon

30 januari 2005

1 Partiella derivator och kedjeregeln

Problem 1.1 *Bestäm partialderivatorna av första ordningen till*

a. $f(x, y) = x^2 - 6x + 2y^4$.

b. $f(x, y) = xy^2$.

c. $f(x, y) = x^3 + 2x^3y^4 - y^4$.

d. $f(x, y) = 2xy^2 - x^3y$.

e. $f(x, y) = \ln(x^2 + xy)$.

f. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy}$.

g. $f(x, y) = x^3e^{xy}$.

Problem 1.2 *Derivera partiellt*

a. $f(x, y) = x \arctan(xy)$.

b. $f(x, y) = e^{2x} \sin(x + y)$.

c. $f(x, y) = e^{xy} \ln(x/y)$.

Problem 1.3 *Bestäm de partiella derivatorna f''_{xx}, f''_{xy} och f''_{yy} till funktionen*

$$f(x, y) = x^3 + 4x^2y + 8xy^2 + 2y^3.$$

Problem 1.4 *Bestäm de partiella derivatorna f''_{xx}, f''_{xy} och f''_{yy} till funktionen*

$$f(x, y) = e^{xy} + x \ln xy.$$

Problem 1.5 *Beräkna derivatan $f^{(3)}_{xxy}(1, 2)$ om*

$$f(x, y) = \frac{e^{2x-y}}{x + y}.$$

Problem 1.6 *Låt $f(x, y) = xy$ och $x = \cos t$, $y = \sin t$. Använd kedjeregeln*

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

för att beräkna df/dt då $t = \pi/2$.

Problem 1.7 *Använd kedjeregeln för att beräkna dz/dt om*

a. $z = 3x^2 + 2xy^3, \quad x = t, \quad y = t^2.$

b. $z = x^3 - 5xy, \quad x = t, \quad y = t.$

c. $z = x^2y^3 + 3, \quad x = 2t^2, \quad y = t^3.$

d. $z = x^3y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t.$

e. $z = xy, \quad x = a + \alpha t, \quad y = b + \beta t.$

Problem 1.8 *Antag, att $z = f(x, y)$ är en funktion av två variabler med kontinuerliga partiella derivator. Om $x = 3t + 2$ och $y = 2t - 1$, beräkna dz/dt.*

Problem 1.9 *Bestäm alla funktioner $f(x, y)$ som uppfyller*

$$\frac{2x}{y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

genom att införa de nya variablerna $u = \frac{1}{y}$ och $v = xy^2$.

Problem 1.10 *Transformera*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

med substitutionen $u = x^2/y$, $v = y$. Lös sedan differentialekvationen.

Problem 1.11 *Transformera*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = f,$$

med substitutionen $u = x + y$, $v = x^2 - y^2$. Lös sedan differentialekvationen.

Problem 1.12 *Transformera vågekvationen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

där c är konstant, genom att göra variabelbytet $u = x + ct$ och $v = x - ct$.

Problem 1.13 *Transformera den partiella differentialekvationen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = (x - y)^2,$$

genom variabelsubstitutionen $u = x^2 - y^2$, $v = x - y$.

2 Gradient och riktningsderivata

Problem 2.1 *Beräkna gradientvektorn* ∇f *om funktionen* f *ges av*

a. $f(x, y) = x^2y + 4y^2$.

b. $f(x, y) = (2x + y)^2$.

c. $f(x, y) = x^2/y$, $y \neq 0$.

d. $f(x, y) = y^3xe^x$.

e. $f(x, y) = xye^{x+y}$.

f. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, $x \neq 0$.

Problem 2.2 *Bestäm* $\nabla f(x, y)$ *i punkten* $(2, 3)$ *då*

a. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$.

b. $f(x, y) = ye^{-xy^2+18}$.

c. $f(x, y) = y \cosh(x - 2)$.

Problem 2.3 *Beräkna längden av gradientvektorn* ∇f, *till funktionen*

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2+2},$$

i punkten $(1, 1)$.

Problem 2.4 *Bestäm derivatan* f'_v *av funktionen*

$$f(x, y) = x^2y^3,$$

i punkten $(1, 1)$ *längs riktningen* $\boldsymbol{v} = (1, \sqrt{3})$.

Problem 2.5 *Beräkna derivatan i riktningen* $\boldsymbol{v} = (-2, 2)$ *av funktionen*

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

i punkten $(1, 1)$.

Problem 2.6 *Bestäm riktningen i vilken funktionen*

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

växer snabbast i punkten $(1, 2)$.

3 Kurvor och ytor

Problem 3.1 *Rita följande ytor för hand eller i Matlab*

a. $f(x,y) = x^2 + y^2$.

b. $f(x,y) = x^2 - y^2$.

c. $f(x,y) = x - y$.

d. $f(x,y) = \sin(2x)\cos(2y)$.

e. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

Problem 3.2 *Skissera några nivåkurvor till funktionen*

$$f(x,y) = x^2 + 9y^2.$$

Problem 3.3 *Skissera några nivåkurvor till funktionen*

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y}.$$

Problem 3.4 *Rita nivåkurvor samt gradientens vektorfält till funktionen*

$$f(x,y) = xy,$$

m.h.a. Matlab, t.ex. Studera speciellt vinkeln mellan nivåkurvorna och ∇f.

Problem 3.5 *Rita den parametriserade kurvan*

$$x(t) = 2 - t, \quad y(t) = 1 + t,$$

från $t = 0$ *till* $t = 1$ *och visa riktningen med en pil.*

Problem 3.6 *Rita den parametriserade kurvan*

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t,$$

från $t = 0$ *till* $t = 2\pi$ *och visa riktningen med en pil.*

Problem 3.7 *Bestäm en tangentvektor i punkten* $(1, 0)$ *till kurvan*

a. $x(t) = \cos t, \quad y(t) = 4 \sin t.$

b. $x(t) = (1 + t)e^t, \quad y(t) = t^2 + t.$

Problem 3.8 *En partikel rör sig längs kurvan* $s(t) = (t, t^2)$*.*

a. Beräkna partikelns hastighet $\boldsymbol{v} = s'(t)$ *vid tiden* t*.*

b. Ange farten $|\boldsymbol{v}|$ *vid tiden* t*.*

c. Bestäm accelerationen $\boldsymbol{v}'(t)$*.*

Problem 3.9 *En partikel rör sig i* xy*-planet så att läget* $s(t)$ *vid tiden* t *ges av*

$$s(t) = (a \cos \omega t, b \sin \omega t),$$

där a*,* b *och* ω *är konstanter.*

a. Hur långt från origo är partikeln vid tiden t*?*

b. Bestäm hastighet och acceleration som funktion av tiden.

c. Visa, att partikeln rör sig i en elliptisk bana, dvs. sådan att

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4 Taylors formel

Problem 4.1 *Bestäm tangentplanet till paraboloiden*

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2,$$

kring punkten $(2,2)$.

Problem 4.2 *Taylorutveckla funktionen*

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y},$$

till första ordning kring punkten $(3,3)$.

Problem 4.3 *Bestäm tangentplanet till den tvåmantlade hyperboloiden*

$$x^2 + y^2 - z^2 = -2,$$

i punkten $(1,1,2)$.

Problem 4.4 *Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan*

a. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ *i punkten* $(1,1,1)$.

b. $z^2 = x^2 y$ *i punkten* $(-2,1,4)$.

Problem 4.5 *Bestäm konstanten* C *så att funktionsytan*

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = C,$$

tangerar planet genom punkterna $(0,1,2)$, $(1,3,0)$ *och* $(0,3,0)$.

Problem 4.6 *Bestäm Taylorpolynomet av andra ordning till funktionen*

$$f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 1,$$

i punkten $(0,0)$.

Problem 4.7 *Taylorutveckla* $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ *till andra ordning kring* $(1,1)$.

Problem 4.8 *Bestäm alla stationära punkter till funktionen*

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + xy.$$

Problem 4.9 *Bestäm alla stationära punkter till funktionen*

$$f(x, y) = e^{-x}(1 - x^2/3 - y^2).$$

Problem 4.10 *Sök eventuella lokala extremvärden till funktionen*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Problem 4.11 *Sök eventuella lokala extremvärden till funktionen*

$$f(x, y) = (1 + xy)e^{-y}.$$

Problem 4.12 *Sök eventuella lokala extremvärden till funktionen*

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}.$$

5 Divergens och rotation

Problem 5.1 *Beräkna* $\nabla \cdot \mathbf{F}$ *och* $\nabla \times \mathbf{F}$ *av fältet*

$$\mathbf{F} = (x^2, y^2, 3zx).$$

Problem 5.2 *Beräkna divergens och rotation till vektorfälten*

a. $\mathbf{F}(x, y, z) = \alpha(x, y, 0)$.

b. $\mathbf{F}(x, y, z) = \alpha(-y, x, 0)$.

Problem 5.3 *Beräkna divergensen av vektorfälten*

a. $\mathbf{A} = (y, z, x)$.

b. $\mathbf{A} = xyz(1, 1, 1)$.

Problem 5.4 *Visa, att* $\nabla \times (\nabla f) = 0$ *för alla skalära funktioner* $f(x, y, z)$.

Problem 5.5 *Beräkna rotationen av vektorfältet* $\mathbf{A} = (ye^x, xe^y, z)$.

Problem 5.6 *Beräkna divergensen av vektorfältet*

$$\mathbf{F} = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

Problem 5.7 *Visa, att fältet* $\mathbf{F} = (2xy^3, 1 + 3x^2y^2, 3z^2)$ *är rotationsfritt.*

Problem 5.8 *Visa att vektorfältet*

$$\mathbf{E} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

är divergensfritt i varje område utom origo.

Problem 5.9 *Visa, att fältet*

$$\mathbf{A} = (y^2 + z^2)yz\mathbf{e}_x + (z^2 + x^2)zx\mathbf{e}_y + (x^2 + y^2)xy\mathbf{e}_z,$$

har samma rotation som fältet $\mathbf{B} = x^2yz\mathbf{e}_x + y^2zx\mathbf{e}_y + z^2xy\mathbf{e}_z$.

6 Kurvintegralen

Problem 6.1 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\Gamma x\,ds,$$

längs kurvan Γ*, given av parametriseringen* $s(t) = (t, t^2)$ *för* $0 \leq t \leq 2$.

Problem 6.2 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\Gamma (3 + x + y)\,ds,$$

längs enhetscirkeln, dvs. $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ *med* $0 \leq t \leq 2\pi$.

Problem 6.3 *Låt* $\Gamma = s(t)$ *vara helixen* $s(t) = (\sin t, \cos t, t)$*. Beräkna*

$$\int_\Gamma (xy + z)ds,$$

om $0 \leq t \leq \pi$.

Problem 6.4 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\Gamma xy\,dx + (x - y)\,dy,$$

där Γ *har parameterframställningen* $x(t) = t$*,* $y(t) = 1 - t$*,* $0 \leq t \leq 1$.

Problem 6.5 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\Gamma y\,dx + x\,dy,$$

längs det räta linjestycket Γ *från* $(1, 2)$ *till* $(3, 4)$.

Problem 6.6 *Ett kraftfält ges av* $\mathbf{F} = (x - y + 1, y)$*. Bestäm arbetet, dvs.*

$$\int \mathbf{F} \cdot ds,$$

som $\mathbf{F}$ *utför på en partikel, som flyttas längs kurvan* $y = x^3$ *från origo till* $(1, 1)$.

Problem 6.7 *Beräkna linjeintegralen av vektorfältet*

$$\mathbf{F} = (-x^2 y, y^3),$$

runt ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *genomlupen ett varv motsols.*

Problem 6.8 *Beräkna integralen*

$$\int_\Gamma \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot ds,$$

där Γ *är den moturs orienterade cirkeln med radie* R *och centrum i origo.*

7 Dubbelintegralen

Problem 7.1 *Beräkna dubbelintegralerna*

a.

$$\int_1^3 \int_0^1 (1+4xy)\,dxdy.$$

b.

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos y\,dxdy.$$

c.

$$\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\,dxdy.$$

Problem 7.2 *Beräkna integralen*

$$\iint_R \frac{dxdy}{x+y},$$

över rektangeln $R = \{x, y : 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2\}$.

Problem 7.3 *Antag att arean av området* Ω *är* 10 *och att*

$$\iint_\Omega x\,dxdy = 2, \qquad \iint_\Omega y\,dxdy = 7.$$

Vad blir värdet av dubbelintegralen $\iint_\Omega (3x+5y-2)\,dxdy$*?*

Problem 7.4 *Beräkna dubbelintegralen*

$$\iint_R y\cos(xy)\,dxdy,$$

där R *är rektangeln* $R = \{x, y : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi/2\}$.

Problem 7.5 *Beräkna*

$$\iint_R \frac{x}{(1+xy)^2}\,dxdy,$$

där området R definieras av olikheterna $1 \le x \le 3$ och $0 \le y \le 1$.

Problem 7.6 *Beräkna*

$$\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy,$$

där D är området mellan linjerna $x = 1$, $x = 4$, $y = x$ och $y = 3x$.

Problem 7.7 *Beräkna*

$$\iint_D (3x + 18y)\,dxdy,$$

där D är området, som begränsas av linjerna $x = 1$, $x = 3$, $y = 4 - 2x/3$ och $y = x/3$.

Problem 7.8 *Beräkna*

$$\iint_D (x + 2y)\,dxdy,$$

där D är området innanför linjerna $x = 0$, $y = 0$ och $y = 2 - x$.

Problem 7.9 *Beräkna*

$$\iint_T (x^2 + y^2)\,dxdy,$$

där T är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$.

Problem 7.10 *Använd variabelbytet $x = 3u - 2v$, $y = u + v$ och beräkna*

$$\iint_R (2x - y)\,dxdy,$$

där R är regionen, som begränsas av olikheterna $x + 2y = 0$, $x + 2y = 10$, $3y - x = 0$ och $3y - x = 5$.

Problem 7.11 *Inför variablerna $u = x + 2y$ och $v = x - 2y$. Beräkna sedan*

$$\iint_R (3x + 6y)^2 dxdy,$$

där R är regionen, som begränsas av linjerna $x - 2y = -2$, $x + 2y = 2$, $x + 2y = -2$ och $x - 2y = 2$.

Problem 7.12 *Beräkna*

$$\iint_K e^{x-y} dxdy,$$

där K är kvadraten innanför linjerna $x - y = 1$, $x + y = 1$, $x + y = -1$ och $x - y = -1$.

Problem 7.13 *Beräkna*

$$\iint_D (x^4 - y^4) dxdy,$$

där området D är begränsat av olikheterna $1 \le x^2 - y^2 \le 2$ och $1 \le xy \le 2$. Ledning: $u = x^2 - y^2$ och $v = xy$.

Problem 7.14 *Beräkna*

$$\iint_C e^{-x^2-y^2}\, dxdy,$$

då C är cirkelringen $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$, $0 \le a \le b$.

8 Greens formel i planet

Problem 8.1 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\gamma (x^2y^3 + x)\,dx + (y^2x^3 + y)\,dy,$$

då γ *är randen till ellipsen* $9x^2 + 4y^2 = 1$.

Problem 8.2 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_C (x^2y - y^3)\,dx + (x^3 - xy^2)\,dy,$$

då C *är cirkeln* $x^2 + y^2 = 9$ *genomlöpt ett varv moturs.*

Problem 8.3 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_C (e^{\sin x} - x^2y)\,dx + e^{y^2}\,dy,$$

där C *är enhetscirkeln* $x^2 + y^2 = 1$ *genomlöpt i positiv led.*

Problem 8.4 *Beräkna*

$$\int_C (x^3 - x^2y)\,dx + xy^2\,dy,$$

där C *är cirkeln* $x^2 + y^2 = 4$ *genomlupen ett varv moturs.*

Problem 8.5 *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2},$$

där C *är bågen från* $(4,0)$ *till* $(0,4)$ *av parabeln* $y^2 = 16 - 4x$.

Problem 8.6 *Visa, att*

$$\iint_S \frac{x^2 + 4xy + y^2}{(x+y)^2}\,dxdy = \frac{a^2}{2}(\pi + 1),$$

där S *är regionen* $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x, y \geq 0$. *Tips:* $P = -\dfrac{y^2}{x+y}$; $Q = \dfrac{x^2}{x+y}$.

9 Trippelintegralen

Problem 9.1 *Beräkna*

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} dzdydx.$$

Problem 9.2 *Beräkna*

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} 2xy\, dzdydx.$$

Problem 9.3 *Beräkna integralen*

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\, dxdydz.$$

Problem 9.4 *Beräkna integralen*

$$\iiint_K (x+y+z)\, dzdydx,$$

där K är den s.k. enhetskuben, given av olikheterna $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Problem 9.5 *Beräkna*

$$\iiint_P x^3 \sin z \cos z\, dxdydz,$$

då P är parallellepipeden mellan $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ och $0 \leq z \leq \pi/2$.

Problem 9.6 *Beräkna*

$$\iiint_T xz\, dzdydx,$$

om T är tetraedern mellan planen $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ och $z=0$.

Problem 9.7 *Beräkna värdet av trippelintegralen*

$$\iiint_S (x+y)\, dxdydz,$$

där S är området mellan ytorna $z = 2-x^2$ och $z = x^2$ från $0 \leq y \leq 3$.

Problem 9.8 *Bestäm*

$$\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)\, dzdydx,$$

där K *är klotet, som definieras av olikheten* $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

Problem 9.9 *Beräkna*

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz,$$

om D *är området, som ligger i cylindern* $x^2 + y^2 = 1$, *under planet* $z = 4$ *och ovanför paraboloiden* $z = 1 - x^2 - y^2$.

Problem 9.10 *Beräkna integralen*

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dzdydx,$$

där Ω *är det område som ligger innanför klotet* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *och ovanför konen* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10 Ytintegralen

Problem 10.1 *Arean av en parametriserad yta* $S = S(u, v)$ *ges av*

$$\iint_{\Omega} \|S'_u \times S'_v\| \, dudv.$$

där Ω *är en parameterdomän. Visa, att detta uttryck reduceras till*

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} \, dxdy,$$

om ytan kan skrivas $S(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

Problem 10.2 *Beräkna arean av en sfär* S *med radie* R. *Använd t.ex. att*

$$S(\varphi, \theta) = R(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta).$$

Problem 10.3 *Beräkna ytintegralen*

$$\iint_S (xy + z) \, dS,$$

där S *är den del av planet* $x + y + z = 2$, *som ligger i första oktanten.*

Problem 10.4 *Beräkna ytintegralen*

$$\iint_S yz \, dS,$$

där S *är triangeln med hörn i punkterna* $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ *och* $(0, 0, 2)$.

Problem 10.5 *Beräkna ytintegralen*

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z) \, dS,$$

där S *är ytan* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Problem 10.6 *Bestäm flödet av vektorfältet*

$$\mathbf{F} = z^2 \mathbf{e}_z,$$

över den del av ytan $z = 2 - (x^2 + y^2)$ *som ligger ovanför* xy*-planet.*

Problem 10.7 *Beräkna flödet av fältet*

$$\mathbf{F} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y,$$

genom mantelytan till halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

11 Gauß sats

Problem 11.1 *Givet vektorfältet* $\mathbf{F} = (2x^2 - 3z, -2xy, -4x)$. *Beräkna*

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz,$$

där V *är regionen i första oktanten, under planet* $2x + 2y + z = 4$.

Problem 11.2 *Låt* $\mathbf{F} = (xy^2 + e^{-y}\sin z, x^2 y + e^x \cos z, \arctan xy)$. *Beräkna*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

där S *är hela randen till kroppen* $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 9\}$.

Problem 11.3 *Beräkna flödet av fältet*

$$\mathbf{F} = z^2(x, y, z),$$

genom mantelytan Y *till sfären* S *med centrum i origo och med radie* 3.

Problem 11.4 *Beräkna flödet av vektorfältet*

$$\mathbf{F} = (3x + z^2, y, x^2 + y^2),$$

genom mantelytan S *till halvsfären* $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = b,\ z \geq 0\}$.

12 Stokes sats

Problem 12.1 *Låt S beteckna den del av planet $z = 4 - x - 2y$, som ligger i första oktanten och har den positivt orienterade randkurvan γ. Använd Stokes sats och beräkna*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds,$$

om $\mathbf{F} = y\mathbf{e}_x - z\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z$.

Problem 12.2 *Låt S vara en liksidig triangel med sidlängd 1 och belägen i planet $ax + by + cz = 0$. Beräkna arbetet, som kraftfältet $\mathbf{F}(x, y, z)$ definierat av*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - 2y - 3z)\mathbf{e}_x + (2x - 3y - z)\mathbf{e}_y + (3x - y - 2z)\mathbf{e}_z,$$

uträttar längs triangelns randkurva γ, genomlöpt ett varv moturs sett från punkten (a, b, c).

Problem 12.3 *Antag, att $\mathbf{F} = (3z, 5x, -2y)$. Beräkna m.h.a. Stokes sats*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds,$$

där γ är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $z = y + 3$, orienterad moturs uppifrån sett.

Problem 12.4 *En cirkel med centrum i punkten $(2, 6, 5)$ och med radie R ligger i planet $3x + y + z = 5$. Givet vektorfältet $\mathbf{F} = (3z + y)\mathbf{e}_y + 2y\mathbf{e}_z$, beräkna*

$$\int \mathbf{F} \cdot ds,$$

längs den positivt orienterade randen av cirkeln.

Problem 12.5 *Låt C vara en cirkel med radie R i planet $x + y + z = 3$. Beräkna*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds,$$

om $\mathbf{F} = (z^2, x^2, y^2)$ och om C är orienterad moturs, ovanfrån sett.

Svar 1.1

a. $f'_x = 2x - 6$, $f'_y = 8y^3$

b. $f'_x = y^2$, $f'_y = 2xy$

c. $f'_x = 3x^2 + 6x^2y^4$, $f'_y = 8x^3y^3 - 4y^3$

d. $f'_x = 2y^2 - 3x^2y$, $f'_y = 4xy - x^3$

e. $f'_x = \dfrac{2x+y}{x^2+xy}$, $f'_y = \dfrac{1}{x+y}$

f. $f'_x = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+2yx}}$, $f'_y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2yx}}$

g. $f'_x = x^2(3+xy)e^{xy}$, $f'_y = x^4e^{xy}$

Svar 1.2

a. $f'_x = \dfrac{xy}{1+x^2y^2} + \arctan(xy)$, $f'_y = \dfrac{x^2}{1+x^2y^2}$

b. $f'_x = e^{2x}\cos(x+y) + 2e^{2x}\sin(x+y)$, $f'_y = e^{2x}\cos(x+y)$

c. $f'_x = ye^{xy}\ln\frac{x}{y} + \frac{1}{x}e^{xy}$, $f'_y = xe^{xy}\ln\frac{x}{y} - \frac{1}{y}e^{xy}$

Svar 1.3 $f''_{xx} = 6x + 8y$, $f''_{xy} = 8x + 16y$ och $f''_{yy} = 16x + 12y$.

Svar 1.4 $f''_{xx} = \frac{1}{x} + e^{xy}y^2$, $f''_{xy} = \frac{1}{y} + e^{xy}(1+xy)$ och $f''_{yy} = x^2e^{xy} - \dfrac{x}{y^2}$.

Svar 1.5 Efter mycket arbete får vi

$$f^{(3)}_{xxy} = -\frac{2e^{2x-y}(3 + 2x^3 - 3y + 6x^2y + 2y^3 + x(6y^2-3))}{(x+y)^4},$$

vilket ger $f^{(3)}_{xxy}(1,2) = -32/27$.

Svar 1.6 Vi har $\partial f/\partial x = y$ och $\partial f/\partial y = x$. Kedjeregeln ger nu

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -y\sin t + x\cos t = -\sin^2 t + \cos^2 t,$$

eftersom $x(t) = \cos t$ och $y(t) = \sin t$. Vid $t = \pi/2$ fås alltså $df/dt = -1$.

Svar 1.7

a. $14t^6 + 6t$

b. $3t^2 - 10t$

c. $52t^{12}$

d. $2\cos^4 \sin t - 3\cos^2 t \sin^3 t$

e. $\alpha(b + \beta t) + \beta(a + \alpha t)$

Svar 1.8 Notera att vi har den sammansatta derivatan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Eftersom $x(t) = 3t + 2$ är $\partial x/\partial t = 3$ och p.s.s. fås $\partial y/\partial t = 2$. Slutligen fås

$$\frac{dz}{dt} = 3\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Svar 1.9 Skriv $f = f(u, v)$ och använd att $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y^2, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2xy.
\end{aligned}$$

Insättning av $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ i $\dfrac{2x}{y}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, ger (efter förenkling)

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Detta betyder att $f(u, v)$ är en funktion enbart av v, $f(u, v) = g(v)$. M.a.o. $f(x, y) = g(xy^2)$.

Svar 1.10 $f(x, y) = g(x^2/y)$

Svar 1.11 $f(x, y) = (x + y)g(x^2 - y^2)$

Svar 1.12 Förstaderivatorna ges av

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},\\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial f}{\partial u} - c\frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

Andraderivatorna ges av

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot 1 + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot 1\right] + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot 1 + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot 1\right]\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial f}{\partial u} - c + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) - c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ &= c\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot c + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot(-c)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot c + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot(-c)\right]\\ &= c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).\end{aligned}$$

Den transformerade vågekvationen ges slutligen av

$$-4c^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

Svar 1.13 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \dfrac{1}{4}$

Svar 2.1

a. $\nabla f(x,y) = (2xy, x^2 + 8y)$

b. $\nabla f(x,y) = (4(2x+y), 2(2x+y))$

c. $\nabla f(x,y) = (2x/y, -x^2/y^2)$

d. $\nabla f(x,y) = (y^3(1+x)e^x, 3y^2xe^x)$

e. $\nabla f(x,y) = (y(1+x)e^{x+y}, x(1+y)e^{x+y})$

f. $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

Svar 2.2

a. $\nabla f(2,3) = (16, 54)$

b. $\nabla f(2,3) = (-27, -35)$

c. $\nabla f(2,3) = (0, 1)$

Svar 2.3 $\nabla f(1,1) = (-2,-2)$ och $|\nabla f| = \sqrt{8}$.

Svar 2.4 Vi har att $\nabla f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$. Den angivna riktningen är inte normerad utan måste justeras till $\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$. Då f'_v är projektionen av ∇f på $\boldsymbol{v}$ fås

$$f'_v(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \boldsymbol{v} = (2,3) \cdot \tfrac{1}{2}(1, \sqrt{3}) = 1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Svar 2.5 0

Svar 2.6 Vi har $f'_v(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \boldsymbol{v} = |\nabla f(1,2)| \cos\theta$ om $|\boldsymbol{v}| = 1$ och θ är vinkeln mellan ∇f och $\boldsymbol{v}$. Största värdet av $\cos\theta$ är 1, vilket ger maximala riktningsderivatan $|\nabla f(1,2)| = \sqrt{5}/2$. Om $\theta = 0$ pekar $\boldsymbol{v}$ och $\nabla f(1,2)$ i samma riktning så $\boldsymbol{v} = (-1,-2)/\sqrt{5}$.

Svar 3.1 Skriv t.ex. följande kod i Matlab

```
[X,Y] = meshgrid(-2:.2:2, -2:.2:2);
Z = sin(2*X).*cos(2*Y);
surf(X,Y,Z)
```

Svar 3.2 En nivåkurva består av alla punkter, som uppfyller $f(x,y) = C$ för någon konstant C. I vårt fall ges nivåkurvorna av ellipserna $x^2 + 9y^2 = C$.

Svar 3.3 Nivåkurvorna är av formen $x^2/y = C$, vilket också kan skrivas

$$y = \frac{x^2}{C}.$$

Det är uppenbart att nivåkurvorna är parabler.

Svar 3.4 Skriv t.ex. följande kod i Matlab

```
[X,Y] = meshgrid(-5:.5:5,-5:.5:5);
Z = X.*Y;
[px,py] = gradient(Z,.5,.5);
contour(Z), hold on, quiver(px,py), hold off
```

Svar 3.5 Linjen $y = 3 - x$ från $(2, 1)$ till $(1, 2)$.

Svar 3.6 Visualisera t.ex. i Matlab m.h.a.

```
t = 0:0.01:2*pi;
x = sin(t);
y = cos(t);
comet(x,y)
```

Svar 3.7

a. $(0, 4)$

b. $(2, 1)$

Svar 3.8

a. $\boldsymbol{v}(t) = (1, 2t)$

b. $|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{2 + 4t^2}$

c. $\boldsymbol{v}'(t) = (0, 2)$

Svar 3.9

a. Avståndet d till origo vid tiden t ges av $d = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$.

b. Partikelns hastighet ges av tangentvektorn $s'(t) = \omega(-a \sin \omega t, b \cos \omega t)$ och accelerationen av dess tidsderivata $s''(t) = -\omega^2(a \cos \omega t, b \sin \omega t)$, dvs. $s''(t) = -\omega^2 s(t)$.

c. -

Svar 4.1 $z = 8x + 12y - 20$

Svar 4.2 $z = 2x - y$

Svar 4.3 $2x + 2y + 4 = 4z$

Svar 4.4

a. $x + 2y + 3z = 6$

b. $-4x + 4y - 8z + 20 = 0$

Svar 4.5 $C = 11$

Svar 4.6 $y^2 + 2xy - 1$

Svar 4.7 $x(3 + (y - 3)y)$

Svar 4.8 Origo är enda stationära punkten (sadelpunkt).

Svar 4.9 Villkoren $f_x' = (x^2/3 - 2x/3 + y^2 - 1)e^{-x} = 0$ och $f_y' = -2ye^{-x} = 0$ ger de stationära punkterna $(-1, 0)$ och $(3, 0)$.

Svar 4.10 Sadelpunkt i origo och lokala minima i punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.

Svar 4.11 Sadelpunkt i $(1, 0)$.

Svar 4.12 maxpunkt

Svar 5.1 Beteckna $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (x^2, y^2, 3zx)$. Divergensen ges av

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= 2x + 2y + 3x = 5x + 2y.\end{aligned}$$

Rotationen fås m.h.a.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &= (0, -3z, 0).\end{aligned}$$

Svar 5.2

a. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2\alpha$, $\nabla \times \mathbf{F} = (0,0,0)$

b. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, $\nabla \times \mathbf{F} = (0,0,2\alpha)$

Svar 5.3

a. $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

b. $\nabla \cdot \mathbf{A} = yz + xz + xy$

Svar 5.4 -

Svar 5.5 $\nabla \times A = (0,0,e^y - e^x)$

Svar 5.6 0

Svar 5.7 $\nabla \times \mathbf{F} = (0,0,0)$

Svar 5.8 -

Svar 5.9 -

Svar 6.1 Vi har $x(t) = t$ och $y(t) = t^2$, vilket ger linjeelementet

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \sqrt{1+4t^2}\, dt,$$

och integralen

$$\int_\Gamma x\, ds = \int_0^2 t\sqrt{1+4t^2}dt = \left[\tfrac{1}{12}\left(1+4t^2\right)^{3/2}\right]_0^2 = \tfrac{1}{12}(17\sqrt{17}-1).$$

Svar 6.2 6π

Svar 6.3 $\pi^2/\sqrt{2}$

Svar 6.4 Vet att $x'(t) = 1$ och $y'(t) = -1$, så $dx = dt$ och $dy = -dt$. Detta ger i sin tur

$$\begin{aligned}\int_\Gamma xy\, dx + (x-y)\, dy &= \int_0^1 t(1-t)dt + (2t-1)(-dt) \\ &= \int_0^1 (1-t-t^2)\, dt = \left[t - \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

Svar 6.5 Vi måste hitta en parametrisering av kurvan Γ. En sådan ges t.ex. av $s(t) = (t, 1+t)$ med $1 \leq t \leq 3$. Parametriseringen ger nu $dx = dy = dt$ och

$$\int_\Gamma y\,dx + x\,dy = \int_1^3 (2t+1)\,dt = 10.$$

Svar 6.6 Parametrisera kurvan med t.ex. $s(t) = (t, t^3)$. Detta ger

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds &= \int_\Gamma (x - y + 1, y) \cdot (dx, dy) \\
&= \int_\Gamma (x - y + 1)\,dx + y\,dy = \qquad \{dx = dt,\ dy = 3t^2\,dt\} \\
&= \int_0^1 (t - t^3 + 1 + 3t^5)\,dt = \frac{7}{4}.
\end{aligned}$$

Svar 6.7 Den vanligaste parametriseringen av randkurvan till en ellips ges av $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, med $0 \leq t \leq 2\pi$. Används denna fås räkningarna

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{F} \cdot ds &= \int -x^2 y\,dx + y^3\,dy \\
&= \int_0^{2\pi} a^3 b\cos^2 t\sin^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} b^4 \sin^3 t\cos t\,dt \\
&= \tfrac{1}{4}\,a^3 b \int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt, \quad \text{den andra integralen är noll,} \\
&= \tfrac{1}{8}\,a^3 b \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{\pi}{4} a^3 b.
\end{aligned}$$

Svar 6.8 0

Svar 7.1

a. Börja med att beräkna den inre integralen

$$\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\,dxdy = \int_1^3 \left[x + 2x^2 y\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_1^3 (1 + 2y)\,dy,$$

och därefter den yttre

$$\int_1^3 (1 + 2y)\,dy = \left[y + y^2\right]_{y=1}^{y=3} = 10.$$

Den sökta dubbelintegralen är alltså lika med 10.

b. 1

c. $\frac{21}{2}\ln 2$

Svar 7.2

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^1 \frac{dxdy}{x+y} &= \int_1^2 \Big[\ln(x+y)\Big]_0^1 dy \\
&= \int_1^2 (\ln(1+y) - \ln y)\, dy \\
&= \Big[(y+1)\ln(y+1) - (y+1) - (y\ln y - y)\Big]_1^2 \\
&= \ln\frac{27}{16}.
\end{aligned}$$

Svar 7.3 21

Svar 7.4 1

Svar 7.5 $2 - \ln 2$

Svar 7.6

$$\iint_D \frac{y}{x}\, dxdy = \int_1^4 \int_x^{3x} \frac{y}{x}\, dydx = \int_1^4 \frac{1}{x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{3x} dx = \int_1^4 4x\, dx = 30$$

Svar 7.7 144

Svar 7.8 4

Svar 7.9 1/3

Svar 7.10 Variabelbytet $x = 3u - 2v$ och $y = u + v$ transformerar R till rektangeln $R' = \{u, v : 0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 1\}$. Funktionaldeterminanten ges av

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Integranden blir $2x-y = 2(3u-2v)-(u+v) = 5u-5v$ och vi får räkningarna

$$\begin{aligned}\iint_R (2x-y)\,dxdy &= \iint_{R'} (5u-5v)5\,dudv \\ &= 25\int_0^2\int_0^1 (u-v)\,dvdu = 25\int_0^2 [uv - \tfrac{1}{2}v^2]_0^1\,du \\ &= 25\int_0^2 (u-\tfrac{1}{2})\,du = 25[\tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}u]_0^2 = 25.\end{aligned}$$

Svar 7.11 48

Svar 7.12 $e^1 - e^{-1}$

Svar 7.13 3/4

Svar 7.14 Området beskrivs enklast i polära koordinater $x = r\cos\varphi$ och $y = r\sin\varphi$ med $a \leq r \leq b$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Funktionaldeterminanten är r, vilket ger

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_a^b \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,d\varphi dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b re^{-r^2}\,dr \\ &= 2\pi\left[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right]_a^b = \pi(e^{-a^2} - e^{-b^2}).\end{aligned}$$

Svar 8.1 Greens formel säger att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy,$$

där Ω är området, som omsluts av kurvan γ. Funktionerna $P = P(x,y)$ och $Q = Q(x,y)$ är godtyckliga, men måste vara kontinuerliga i Ω. Om vi väljer $P = x^2y^3 + x$ och $Q = y^2x^3 + y$ följer att den sökta kurvintegralen är noll, ty $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 0$.

Svar 8.2 Låt $P = x^2y - y^3$ och $Q = x^3 - xy^2$ så att $\partial Q/\partial x = 3x^2 - y^2$ och $\partial P/\partial y = x^2 - 3y^2$. Greens formel transformerar kurvintegralen till en enkel dubbelintegral

$$\int_C (x^2y - y^3)\,dx + (x^3 - xy^2)\,dy = 2\iint_{x^2+y^2\leq 9} (x^2+y^2)\,dxdy.$$

Byte till polära koordinater ger genast

$$2\iint_{x^2+y^2\le 9}(x^2+y^2)\,dxdy = 2\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^3\,dr d\varphi = 81\pi.$$

Svar 8.3 $\pi/4$

Svar 8.4 8π

Svar 8.5 Skriv integralen på formen $\displaystyle\int_C P\,dx + Q\,dy$, där

$$P = \frac{y}{(x+y)^2}, \qquad Q = -\frac{x}{(x+y)^2}.$$

Greens formel kan inte användas direkt eftersom kurvan C inte innesluter något område. Addera därför linjen L mellan punkterna $(4,0)$ och $(0,4)$ till integrationsvägen. Kurvan $L+C$ bildar nu rand till området D, som ligger under parabeln $y^2 = 16-4x$ och över linjen $y = 4-x$. Greens formel kan därför användas på denna kurva.

$$\int_{C+L}\frac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2} = \int_{C+L} Pdx + Qdy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

Längs linjen $y = 4-x$ gäller vidare att $dy = -dx$, dvs.

$$\int_L \frac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2} = \int_0^4 \frac{(4-x)+x}{4^2}\,dx = 1.$$

P.g.a. orienteringen av L blir den sökta kurvintegralen -1.

Svar 8.6 Tips: $\cos^3\alpha + \sin^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)$.

Svar 9.1

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_{x^2}^x\int_0^{xy} dzdydx &= \int_0^1\int_{x^2}^x\left(\int_0^{xy} 1\,dz\right)dydx \\
&= \int_0^1\int_{x^2}^x [z]_0^{xy}\,dydx = \int_0^1\left(\int_{x^2}^x xy\,dy\right)dx \\
&= \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 x\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Svar 9.2

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} 2xy\, dzdydx \\
&\qquad = \int_0^1 \int_x^{2x} 2xy\,[z]_0^{x+y}\, dydx = \int_0^1 \int_x^{2x} 2xy(x+y)\, dydx \\
&\qquad = \int_0^1 \int_x^{2x} (2x^2y + 2xy^2)\, dydx = \int_0^1 \left[x^2y^2 + \tfrac{2}{3}xy^3\right]_x^{2x} dx \\
&\qquad = \int_0^1 \left(4x^4 + \tfrac{16}{3}\,x^4 - \left(x^4 + \tfrac{2}{3}\,x^4\right)\right) dx \\
&\qquad = \int_0^1 \tfrac{23}{3}\,x^4\, dx = \tfrac{23}{15}\left[x^5\right]_0^1 = \frac{23}{15}
\end{aligned}
$$

Svar 9.3

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\, dxdydz &= \int_0^1 \int_0^z \left[xze^{-y^2}\right]_0^y dydz \\
&= \int_0^1 \int_0^z yze^{-y^2}\, dydz = \int_0^1 \left[-\tfrac{1}{2}\, ze^{-y^2}\right]_0^z dz \\
&= \int_0^1 -\tfrac{1}{2}\left(ze^{-z^2} - z\right) dz = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\, e^{-z^2} + \tfrac{1}{2}\, z^2\right]_0^1 = \frac{1}{4e}
\end{aligned}
$$

Svar 9.4 3/2

Svar 9.5 1/4

Svar 9.6 1/120

Svar 9.7 Ytorna $z = 2 - x^2$ och $z = x^2$ skär varandra längs linjerna $x = 1$ och $x = -1$. Integrationsgränserna är därför $0 \le y \le 3$, $-1 \le x \le 1$ och $x^2 \le z \le 2 - x^2$, vilket ger

$$
\int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} (x+y)\, dzdxdy = 12.
$$

Svar 9.8 Klotet kan beskrivas med sfäriska koordinater $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ och $z = r\cos\theta$ med $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le r \le a$.

Volymselementet är $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ och $x^2+y^2+z^2 = r^2$, vilket medför att

$$\begin{aligned}
\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^4 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a \sin\theta\, d\theta d\varphi \\
&= \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta d\varphi \\
&= \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi} d\varphi = \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi} 2\,d\varphi = \frac{4}{5}\,\pi a^5.
\end{aligned}$$

Svar 9.9 $12\pi/5$

Svar 9.10 I sfäriska koordinater får klotet och konen ekvationerna $r = 1$ respektive $\theta = \pi/4$. Integrationsområdet bestäms således av olikheterna $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Vi får

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz &= \iiint_\Omega r^3 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr \\
&= \frac{\pi}{2}\big[-\cos\theta\big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{4}.
\end{aligned}$$

Svar 10.1 Se boken.

Svar 10.2 $4\pi R^2$

Svar 10.3 Planet S kan skrivas $z = f(x,y) = 2 - x - y$, dvs.

$$\iint_S (xy+z)\,dS = \iint_S (xy + 2 - x - y)\,dS.$$

För att beräkna ytelemenetet dS, behövs nu en parameterframställning av S, t.ex. $S(x,y) = (x,y,f(x,y)) = (x,y,2-x-y)$. En infintesimal area på ytan S kan skrivas

$$dS = \|S'_x \times S'_y\|\,dxdy = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy = \sqrt{3}\,dxdy.$$

Eftersom $x, y, z \geq 0$ i första oktanten fås integrationsgränserna $0 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq 2 - x$. Detta ger

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} (xy + 2 - x - y)\sqrt{3}\, dydx = 2\sqrt{3}.$$

Svar 10.4 1/3

Svar 10.5 16π

Svar 10.6 Ytan S kan parametriseras $S(x,y) = (x, y, 2-(x^2+y^2))$. Då ytans tangentvektorer är $S'_x = (1, 0, -2x)$ och $S'_y = (0, 1, -2y)$ fås enhetsnormalen

$$\mathbf{n} = \frac{S'_x \times S'_y}{\|S'_x \times S'_y\|} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Ytelementet dS ges av $dS = \|S'_x \times S'_y\|\, dxdy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy$. Vi får

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_D z^2\, dxdy,$$

där D är projektionen av S på xy-planet. Eftersom området D är cirkelskivan $x^2 + y^2 = 2$, evalueras integralen lättast med polära koordinater. Insättning av $z = 2 - x^2 - y^2$ ger slutligen

$$\begin{aligned} \iint_D z^2\, dxdy &= \iint_D (2 - x^2 - y^2)^2\, dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r\, drd\varphi = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3)\, dr = 2\pi. \end{aligned}$$

Svar 10.7 Ytan parametriseras enklast i sfäriska koordinater (r, θ, φ). Då radien är konstant $r = a$ på ytan, fås

$$S(\theta, \varphi) = a(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

Parameterformen ger ytelementet $dS = a^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$, och enhetsnormalen

$$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

Eftersom $\mathbf{F} = a(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, 0)$ erhålls

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= a^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi)\,d\theta d\varphi\\ &= a^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta d\varphi\\ &= 2\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

Svar 11.1 Vi har $\nabla\cdot\mathbf{F} = 4x - 2x = 2x$, så volymsintegralen ges av

$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz &= \iiint_V 2x\,dxdydz\\ &= 2\int_0^2 x\,dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{4-2x-2y}dz\\ &= 2\int_0^2 x\,dx\int_0^{2-x}(4-2x-2y)\,dy\\ &= 2\int_0^2 x\left[4y - 2xy - y^2\right]_0^{2-x}dx\\ &= 2\int_0^2(4x - 4x^2 + x^3)\,dx = \tfrac{8}{3}.\end{aligned}$$

Svar 11.2 $\nabla\cdot\mathbf{F} = x^2 + y^2$ så Gauss sats innebär att

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz\\ &= \iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz = \iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^9 (x^2+y^2)\,dz\\ &= \iint_D (9 - x^2 - y^2)(x^2+y^2)\,dxdy,\end{aligned}$$

där D är cirkelskivan $x^2 + y^2 = 9$. Byte till polära koordinater ger slutligen

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \int_0^3 dr\int_0^{2\pi} r^2(9-r^2)r d\varphi\\ &= 2\pi\int_0^3(9r^3 - r^5)\,dr\\ &= 2\pi\left[\frac{9}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^6\right]_0^3 = \frac{243\pi}{2}.\end{aligned}$$

Svar 11.3 324π

Svar 11.4 Gauss' sats kan inte användas direkt eftersom S inte är en sluten yta. Men om vi lägger till cirkelskivan D, definierad av $x^2 + y^2 \leq b^2$, $z = 0$, så innesluter ytorna S och D halvsfären $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| \leq b,\ z \geq 0\}$. Förutsättningarna för Gauss' sats är nu uppfyllda. Om normalen till D väljs utåtriktad fås

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz.$$

Volymen av en halvsfären med radie b är $\frac{2}{3}\pi b^3$ och eftersom $\nabla \cdot \mathbf{F} = 4$, fås

$$\iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_B 4\, dxdydz = \frac{8}{3}\pi b^3.$$

Positiva enhetsnormalen till D är $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, vilket ger

$$\begin{aligned}\iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_D (3x + z^2, y, x^2 + y^2) \cdot (0, 0, -1)\, dS \\ &= \iint_D -(x^2 + y^2)\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^b -r^3 dr d\varphi \\ &= -\frac{1}{2}\pi b^4,\end{aligned}$$

dvs. den sökta integralen har värdet $\frac{8}{3}\pi b^3 + \frac{1}{2}\pi b^4$.

Svar 12.1 Planet parametriseras av $S(x, y) = (x, y, 4 - x - 2y)$. Normalen ges av $S'_x \times S'_y = (1, 2, 1)$. Rotationen är $\nabla \times \mathbf{F} = (1 + x, -y, -1)$, dvs. $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (1, 2, 1) = 1 + x - 2y - 1 = x - 2y$. Stokes sats ger därför vidare att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_0^4 \int_0^{2-x/2} (x - 2y)\, dxdy = 0,$$

där vi utnyttjat att $dS = \|S'_x \times S'_y\|\, dxdy$ och att $\mathbf{n} = \dfrac{S'_x \times S'_y}{\|S'_x \times S'_y\|}$.

Svar 12.2 Det sökta arbetet defineras av $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds$.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x - 2y - 3z & 2x - 3y - z & 3x - y - 2z \end{vmatrix} = (0, -6, 4).$$

En enhetsnormal till planet $ax + by + cz = 0$ ges av $\mathbf{n} = \dfrac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, så

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \iint_S \frac{-6b + 4c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\, dS \\
&= \frac{4c - 6b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \iint_S dS \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{4c - 6b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},
\end{aligned}$$

eftersom arean av triangeln S är $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Svar 12.3 Beräkna först rotationen

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix} = (-2, 3, 5).$$

Om Y betecknar det ytstycke i planet $z = y + 3$, som innesluts av γ med normalen $\mathbf{n} = (0, -1, 1)$ blir γ rand till Y med positiv orientering. Stokes sats ger därför

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds &= \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \iint_Y (-2, 3, 5) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1)\, dS \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \iint_Y dS = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{2}\pi = 2\pi,
\end{aligned}$$

där vi normaliserat $\mathbf{n}$ samt beräknat arean av Y genom att inse att Y är en ellips med halvaxlarna $\sqrt{2}$ och 1.

Svar 12.4 Observera att $\nabla \times \mathbf{F} = (-1, 0, 0)$. En normal till D med rätt orientering är $\mathbf{n} = (3, 1, 1)/\sqrt{11}$, dvs. komponenten i normalriktningen till $\nabla \times \mathbf{F}$ är $-3/\sqrt{11}$. Arean av D är πR^2, så m.h.a. Stokes sats är integralen $-3\pi R^2/\sqrt{11}$.

Svar 12.5 Vi har $\nabla \times \mathbf{F} = (2y, 2z, 2x)$. Låt D vara cirkelskivan i planet $x + y + z = 3$, som har randen C. En uppåtriktad enhetsnormal till D är $\mathbf{n} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$, så

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot ds &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_D (2y, 2z, 2x) \cdot (1, 1, 1) \, dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_D (2x + 2y + 2z) \, dS \\
&= 2\sqrt{3} \iint_D \, dS \\
&= 2\sqrt{3}\pi R^2,
\end{aligned}$$

där vi i sista ledet använt oss av att arean av cirkelskivan är πR^2.