

exempel på bevis för
kombination av gränsvärde.

Påst (linjär kombination)

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Bewis ~~Proof~~

Låt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = K$$

Vi vet: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_f = \delta_f(\varepsilon)$
så att

$$0 < |x - a| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

och $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_g = \delta_g(\varepsilon)$
så att

$$0 < |x - a| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - K| < \varepsilon$$

~~Vi måste visa~~

Tag nu $\varepsilon > 0$. Vi måste
bestämna $\delta = \delta(\varepsilon)$ så att

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha L + \beta K)| < \varepsilon.$$

För att göra detta beräknar vi:

$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha L + \beta K)| =$$

~~-----~~

$$= |\alpha (f(x) - L) + \beta (g(x) - K)|$$

$$\leq |\alpha (f(x) - L)| + |\beta (g(x) - K)|$$

$$= |\alpha| \underbrace{|f(x) - L|}_{< \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}} + |\beta| \underbrace{|g(x) - K|}_{< \frac{\varepsilon}{2|\beta|}} < \varepsilon$$

Detta gäller om

$$0 < |x - a| < \delta_f\left(\frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right)$$

och

$$0 < |x - a| < \delta_g\left(\frac{\varepsilon}{2|\beta|}\right)$$

Vi kan alltså ta

$$\delta = \min\left(\delta_f\left(\frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right), \delta_g\left(\frac{\varepsilon}{2|\beta|}\right)\right).$$

Om en av α, β är $= 0$, t.ex., $\alpha = 0$ så tar vi $\delta = \delta_g\left(\frac{\varepsilon}{2|\beta|}\right)$. Om $\beta = \alpha = 0$ tar vi $\delta = 1$.

exempel

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \cancel{2(x-2)} (x+2) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \cancel{4} \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 8$$

$$\begin{aligned} &= \cancel{2(x-2)} + \cancel{4} = \cancel{8} \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

där använt de redan kända
gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow a} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

Adams 9.1

(4)

Talföljd (sequence of numbers)

exempel a) $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

b) $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\}$

c) $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Kan ses som en funktion

$$f(n) = a_n$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

exempel a) $a_n = n, a_n = a_{n-1} + 1$

b) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n, a_n = -\frac{1}{2} a_{n-1}$

~~Matlab~~

Matlab $\gg n = 1:100$

$$\gg a = (-0.5) \wedge n;$$

$$\gg a' = a'$$

Aritmetisk följd med differensen d :

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Geometrisk följd med kvoten x :

$$a_n = x a_{n-1}$$

Konvergens, gränsvärde

(5)

definition 2 Vi säger att

följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är konvergent
med gränsvärdet L ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

om $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ så att

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Vi skriver också: $a_n \rightarrow L$ då $n \rightarrow \infty$.

Obs: $N = N(\varepsilon)$.

Tre enkla grundläggande exempel.

1) konstant följd: $a_n = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Beweis: $|a_n - L| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$

~~och~~ för alla $\varepsilon > 0$ och
alla n . Vi kan
alltså ta $N = 1$.

(6)

$$2) \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{bevis: } |a_n - L| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

om $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Vi kan ta

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil. \quad \text{minsta heltalsfunktion}$$

Här är $\lceil x \rceil$ minsta heltalsfunktionen
(heltalsuppfunktionen) se Adams
P. 5 Example 11.

Matlab: `ceil(x)`.

$$3) \quad a_n = x^n \quad \{x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad \text{om } |x| < 1.$$

$$\text{bevis: } |a_n - L| = |x^n - 0| = |x^n| = |x|^n < \varepsilon$$

$$\text{om } |x|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \underbrace{\ln(|x|)}_{< 0} < \ln(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|x|)}$$

Vi kan ta

$$N = \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|x|)} \right\rceil.$$

Till exempel: $x = -\frac{1}{2}$, $\varepsilon = 10^{-6} \Rightarrow N = \left\lceil \frac{\ln 10^{-6}}{\ln \frac{1}{2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{-6 \ln 10}{-\ln 2} \right\rceil$

Följden är divergent om $\approx \lceil 19.3 \rceil = 20$
den inte är konvergent.

ex $a_n = (-1)^n$, $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$
har inget gränsvärde, divergent.

Definition $\{a_n\}$ divergerar mot ∞ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \text{om} \quad \forall M > 0 \exists N :$$

~~$$n \geq N \Rightarrow a_n > M$$~~

$$n \geq N \Rightarrow a_n > M$$

På liknande sätt definieras

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

(divergera mot $-\infty$).

ex. $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$

bevis: $a_n = n > M$ om $n \geq \lceil M \rceil$

Kombination av gränsvärden (8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \right)$$

ex

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \right)^2 = 0^2 = 0 \end{aligned}$$

ex

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} = 0 & \text{om } |x| < 1 \\ \text{divergent} & \text{om } |x| > 1 \\ = 1 & \text{om } x = 1 \\ \text{divergent} & \text{om } x = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty \quad \text{om } x > 1.$$