

Lipschitz-kontinuitet.

Vi ska införa ett slags kontinuitet som är lättare att använda.

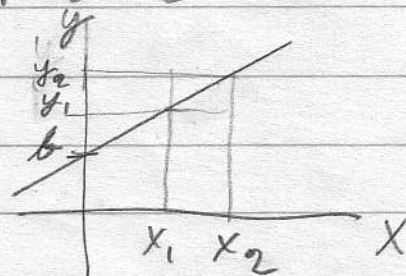
Definition Funktionen f är Lipschitzkontinuerlig på intervallet I med Lipschitzkonstanten L_f om

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Exempel Linjär funktion

$$f(x) = mx + b$$

med $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.



$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(mx_1 + b) - (mx_2 + b)|$$

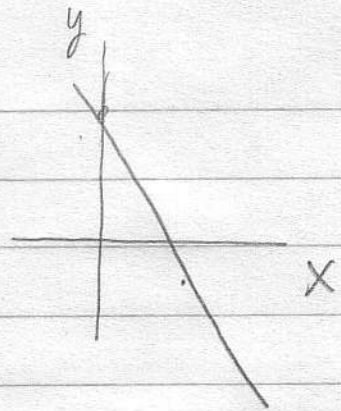
$$= |m(x_1 - x_2)|$$

$$= |m| |x_1 - x_2|$$

Vi kan så $L_f = |m|$.

Exempel $f(x) = -3x + 2$

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |-3| |x_1 - x_2| \\ &= 3 |x_1 - x_2| \end{aligned}$$



Om vi vill att $|f(x_1) - f(x_2)| < 10^{-3}$
så bör vi ha

$$3 |x_1 - x_2| < 10^{-3}$$

dvs $|x_1 - x_2| < \frac{1}{3} 10^{-3}$.

Exempel $f(x) = x^2$ på $I = [-2, 2]$

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| = \\ &= |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| \\ &= |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \\ &\leq (|x_1| + |x_2|) |x_1 - x_2| \\ &\leq (2 + 2) |x_1 - x_2| \\ &= 4 |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

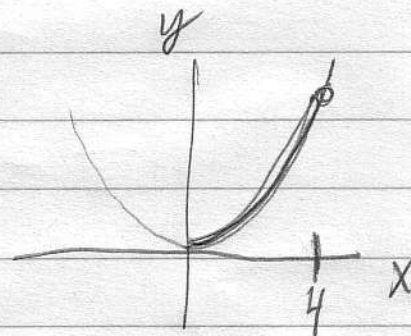
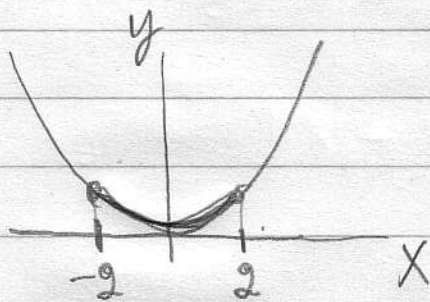
Alltså: $f(x) = x^2$ är Lipschitz med
konstanten $L_f = 4$ på $[-2, 2]$.

3

Exempel $f(x) = x^2$ på $[0, 4]$.

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq (|x_1| + |x_2|) |x_1 - x_2| \\ &\leq (4 + 4) |x_1 - x_2| \\ &= 8 |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

Här är $L_f = 8$.



Löst uttryckt: L_f är maximala lutningen tagen med absolutbelopp.

Exempel $f(x) = x^2$ på $\mathbb{R}$.

ej Lipschitz på $\mathbb{R}$ ty

$|x_1 + x_2|$ kan bli hur stor som helst, " $L_f = \infty$ ".

4

Sats Om f är Lipschitz -
kontinuerlig på I så
är f kontinuerlig på I .

Bewis Vi vet

$$(*) \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Tag $c \in I$. Vi ska visa
att f är kont. i c , dvs

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Detta betyder: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) :$

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Tag $\varepsilon > 0$. Lipschitzvillkoret $(*)$
ger

$$|f(x) - f(c)| \leq L_f |x - c|$$

$$\text{Vi vill: } L_f |x - c| < \varepsilon$$

Detta gäller om

$$|x - c| < \frac{1}{L_f} \varepsilon$$

Vi kan alltså ta $\delta = \frac{1}{L_f} \varepsilon$.

Om c är ändpunkt till I ska gränsvärdet tolkas som ensidigt gränsvärde

$$\lim_{x \rightarrow c+} f(x) \text{ eller } \lim_{x \rightarrow c-} f(x).$$

Sats Om f är Lipschitz på ett begränsat intervall I så är f en begränsad funktion på I .

Bewis Eftersom I är begränsat så har I en ändlig längd K .

T.ex. om $I = [a, b]$ eller (a, b) så är $K = b - a$. Vi måste hitta en konstant M sådan att

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in I.$$

Tag en punkt $a \in I$. Lipschitz-villkoret ger för alla $x \in I$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(a) - f(a) + f(x)| \\ &\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \\ &\leq |f(a)| + L_f |x - a| \\ &\leq |f(a)| + L_f K = M. \end{aligned}$$

Vi kan kombinera Lipschitz-kontinuerliga funktioner.

Sats. Antag f och g är Lipschitz på I . Då är följande kombinationer också Lipschitz på I . $\gamma(b)$ och (c) krävs att f och g är begränsade på I .

(a) $\alpha f(x) + \beta g(x)$

(b) $f(x)g(x)$

(c) $\frac{f(x)}{g(x)}$ om $|g(x)| \geq a \quad \forall x \in I$ och

något $a > 0$.

(d) $f(g(x))$

Beweis Vi bevisar (a) och (b) och (d). (7)

$$\begin{aligned}(a) & \left| (\alpha f(x_1) + \beta g(x_1)) - (\alpha f(x_2) + \beta g(x_2)) \right| \\&= \left| \alpha(f(x_1) - f(x_2)) + \beta(g(x_1) - g(x_2)) \right| \\&\leq |\alpha| |f(x_1) - f(x_2)| + |\beta| |g(x_1) - g(x_2)| \\&\leq |\alpha| L_f |x_1 - x_2| + |\beta| L_g |x_1 - x_2| \\&= (|\alpha| L_f + |\beta| L_g) |x_1 - x_2|\end{aligned}$$

Lipschitz konstanten blir

$$L = |\alpha| L_f + |\beta| L_g.$$

$$\begin{aligned}(b) & |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| = \\&= |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \\&\leq |f(x_1)| |g(x_1) - g(x_2)| + |f(x_1) - f(x_2)| |g(x_2)| \\&\leq M_f L_g |x_1 - x_2| + L_f |x_1 - x_2| M_g \\&= (M_f L_g + M_g L_f) |x_1 - x_2|, \\&L = M_f L_g + M_g L_f\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
 (d) \quad |f(g(x_1)) - f(g(x_2))| &\leq \\
 &\leq L_f |g(x_1) - g(x_2)| \\
 &\leq L_f L_g |x_1 - x_2| \\
 L &= L_f \cdot L_g.
 \end{aligned}$$

~
Övningar. Bestäm en L_f för
 följande funktioner.

1. $f(x) = x^3$ på $[0, 2]$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ på $[1, 10]$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ på $[1, 10]$

4. $f(x) = 4x^2 - 3x$ på $[-1, 1]$

Svar:

1. $L_f = 12$
2. $L_f = 1$
3. $L_f = 20$
4. $L_f = 4 \cdot 2 + 3 = 11$

Obs: dessa L_f är kanske inte minsta
 möjliga, men det säcker att hitta
 en L_f som inte är överdrivet stor.