FÖ 3.1 2006

Lösa ekvationen $f(x) = 0$.

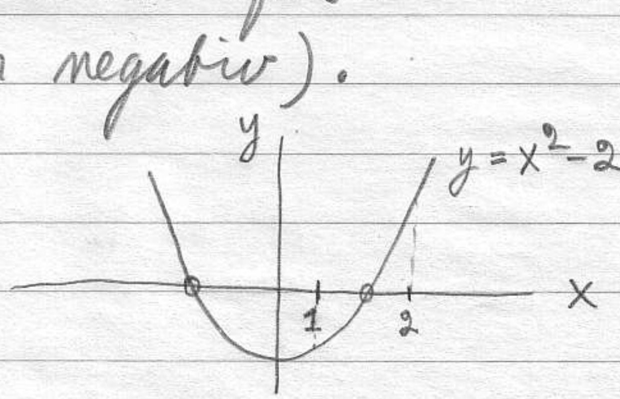
Vi ska konstruera lösning till ekv $f(x) = 0$ med hjälp av bisektions-algoritmen (intervallhalveringsmetoden).

På samma gång ska vi se hur man definierar de reella talen och bevisa "Bolzanos sats" och "satsen om mellanliggande värden" (Adams 1.4, Theorem 9).

Vi gör detta först i form av ett exempel.

Exempel $f(x) = x^2 - 2$

Grafen antyder att ekvationen har exakt en positiv lösning (och en negativ).



Den positiva lösningen är naturligtvis $\sqrt{2}$. Men vi börjar med att visa att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal och därför inte kan representeras exakt på datorn. Sedan ska konstruera och definiera talet $\sqrt{2}$ som ett nytt slags tal: reellt tal.

<u>Påstående</u> Ekvationen $x^2 = 2$ har ingen rationell lösning.

<u>Bevis</u> Antag att $x \in \mathbb{Q}$ (rationellt tal) uppfyller $x^2 = 2$.

Vi skriver $x = \frac{p}{q}$, där $p, q \in \mathbb{Z}$ (hela tal) och där vi har förkortat så att p och q inte har några gemensamma faktorer. Ekvationen $x^2 = 2$ ger då

$$p^2 = 2q^2$$

vilket betyder att p innehåller faktorn 2:

$$p = 2r \quad (\text{något } r \in \mathbb{Z})$$

Men då får vi $x = \frac{2r}{q}$ och $x^2 = 2$ ger

$$\frac{4r^2}{q^2} = 2,$$

$$q^2 = 2r^2,$$

så att även q innehåller faktorn 2.

Men detta är en motsägelse till vårt antagande att vi har förkortat $\frac{p}{q}$. Alltså kan inte x vara ett rationellt tal.

Konstruktion av $\sqrt{2}$.

Låt $f(x) = x^2 - 2$. Vi söker $\bar{x}$ så att $f(\bar{x}) = 0$.
Vi har

$$f(1) = -1 < 0$$
$$f(2) = 2 > 0$$

och vi drar slutsatsen att $\bar{x} \in [1, 2]$.
Alltså borde mittpunkten 1.5 vara närmare $\bar{x}$.

Låt $x_0 = 1$, $X_0 = 2$, $\hat{x}_0 = (x_1 + X_1)/2 = 1.5$

Vi har $f(\hat{x}_0) = 2.25 - 2 = 0.25 > 0$

och roten $\bar{x}$ bör ligga i intervallet $[1, 1.5]$.

Låt då $x_1 = x_0 = 1$, $X_1 = \hat{x}_0 = 1.5$.
Det aktuella intervallet är

$$[x_1, X_1] = [1, 1.5].$$

Vi bildar mittpunkten

$$\hat{x}_1 = (x_1 + X_1)/2 = 1.25$$

Nu är $f(\hat{x}_1) = (1.25)^2 - 2 = -0.4375 < 0$

Vi sätter då $x_2 = \hat{x}_2 = 1.25$, $X_3 = X_2 = 1.5$

Vi har

i	x_i	X_i
0	1	2
1	1	1.5
2	1.25	1.5

Kör programmet "bisectdemo.m".

Det verkar som en decimalutveckling växer fram.

Frågor:

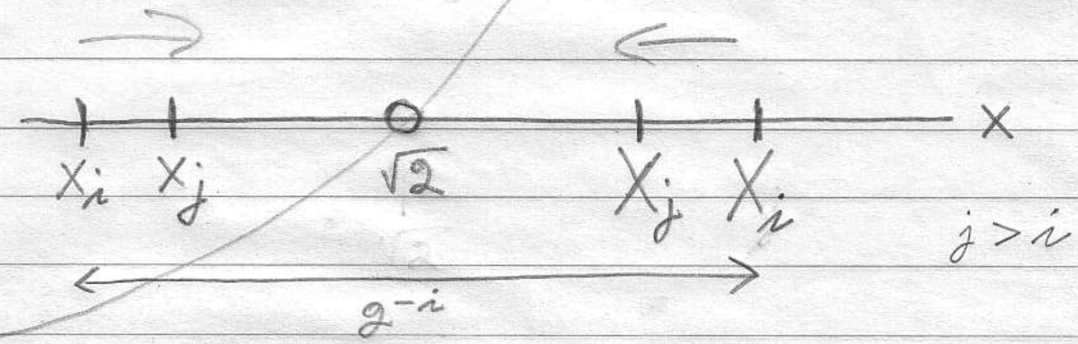
1. Hur kan vi veta att det är en decimalutveckling? (Vi kan ju inte beräkna alla decimalerna, bara ändligt många.)

2. Hur kan vi veta att den löser ekvationen?

3. Finns det någon annan decimal-utveckling som löser ekvationen?

Svar:

Fråga 1. Vi har konstruerat två följder $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ av rationella tal.



Vi har

(1) $\quad |x_i - X_i| = 2^{-i}$

(2) $\quad |x_i - x_j| \leq 2^{-i}$ för $j \geq i$

(3) $\quad |X_i - X_j| \leq 2^{-i}$ för $j \geq i$

Olikheterna (2) och (3) innebär att $\{x_i\}$ och $\{X_i\}$ bildar decimalutvecklingar. Om $2^{-i} < 10^{-N-1}$ så har vi N fixerade decimaler. Eftersom $2^{+10} = 1024$ så får vi

$$2^{-i} = \left(2^{-10}\right)^{i/10} \leq \left(10^{-3}\right)^{i/10} = 10^{-3i/10}.$$

Alltså: om vi tar $i \geq \frac{3(N+1)}{10}$ så får vi $2^{-i} \leq 10^{-N-1}$, dvs N decimaler (vi vinner ungefär 3 decimaler per 10 steg).

Vi betecknar dem med

$$\bar{x} = \lim_{i\to\infty} x_i = 1.41421356\ldots$$
$$\bar{X} = \lim_{i\to\infty} X_i = 1.41421356\ldots$$

Likheten (1) innebär att decimalutvecklingarna är lika. Med $2^{-i} \leq 10^{-N-1}$ överenstämmer x_i och X_i till N decimaler. Alltså $\bar{x} = \bar{X} = 1.41421356\ldots$

Vi skriver

$$\sqrt{2} = \bar{x} = \bar{X} = 1.41421356\ldots$$

Fråga 2. Vi vill visa att $f(\sqrt{2}) = 0$

dvs $(\sqrt{2})^2 = (1.4142\ldots)^2 = 2$.

Vi visar detta i form av gränsvärdet

$$(*) \qquad \lim_{i\to\infty} f(x_i) = 0$$

Kom ihåg att $f(x) = x^2 - 2$ är Lipschitz kontinuerlig på $[1, 2]$ med konstanten $L_f = 4$.

$(*)$ betyder: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ så att

$$i \geq N \Rightarrow |f(x_i) - 0| < \varepsilon.$$

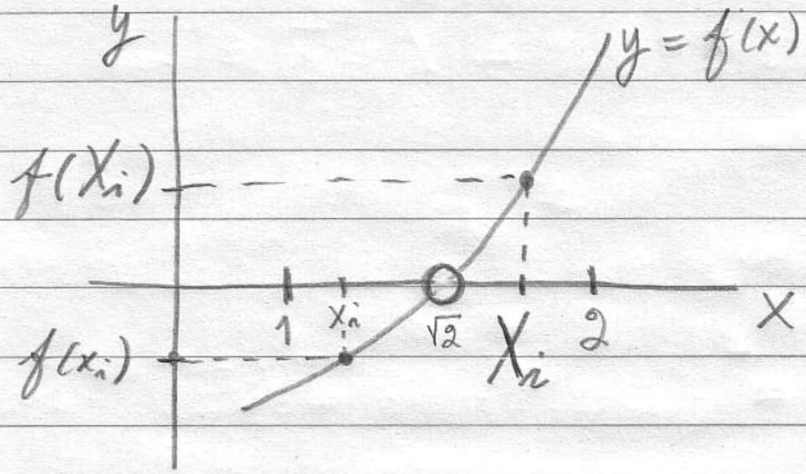
Tag då $\varepsilon > 0$. Vi har (se figur nästa sida)

$$|f(x_i) - 0| = |\underbrace{f(x_i)}_{<0}| = -f(x_i) < \underbrace{f(X_i)}_{>0} - f(x_i) \leq$$

$$\leq 4 |X_i - x_i| \leq 4 \cdot 2^{-i} < \varepsilon$$

om $i > \frac{\ln(\varepsilon/4)}{\ln(1/2)}$. Tag $N = \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon/4)}{\ln(1/2)} \right\rceil$.

Detta bevisar (*).



Fråga 3. Finns det fler positiva lösningar?

Funktionen $f(x)=x^2-2$ är strängt växande för $x\geq 0$; dvs

$$0\leq x<y \Rightarrow f(x)<f(y).$$

Bevis: $0<x<y$ medför
$x^2<xy$ och $xy<y^2$
dvs $x^2<xy<y^2$ och
$x^2-2<y^2-2$.

Antag nu att det finns två lösningar x,y med $0<x<y$. Men då är $0=f(x)<f(y)=0$, vilket är omöjligt.

Alltså är $\bar{x}=\sqrt{2}=1.41421356\ldots$ den enda positiva lösningen.

Notera följande:

1. Vi har konstruerat en approximerande följd x_i.
2. Vi har visat att följden ger en decimalutveckling $\bar{x} = \lim_{i \to \infty} x_i$.
3. Vi har visat $\lim_{i \to \infty} f(x_i) = 0$, dvs $f(\bar{x}) = 0$.
4. Vi har visat att det finns bara en positiv lösning, dvs alla konstruktioner ger samma resultat $\bar{x}$.

Nästa gång:

- allmän ekvation $f(x) = 0$
- Cauchy-följd
- reella tal
- Bolzanos sats
- satsen om mellanliggande värden.