

Lösa ekv $f(x)=0$, igen.

Vi formulerar nu bisektionsalgoritmen för en allmän ekv av typen $f(x)=0$.

Givet: f kontinuerlig på $[a, b]$
med $f(a)f(b) < 0$ (olika tecken).

(a). Sätt $x_0 = a, X_0 = b, i = 0$.

Steg (b) Bilda $\hat{x}_i = (x_i + X_i)/2$.

Om $f(\hat{x}_i) = 0$, sätt $x_{i+1} = X_{i+1} = \hat{x}_i$ och stoppa.

Om $f(x_i)f(\hat{x}_i) < 0$ sätt $x_{i+1} = x_i, X_{i+1} = \hat{x}_i$.

Om $f(X_i)f(\hat{x}_i) < 0$ sätt $x_{i+1} = \hat{x}_i, X_{i+1} = X_i$.

Sätt $i = i+1$ och upprepa (b).

Algoritmen genererar två följder $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ och $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$. Om algoritmen stoppar i steg i så fortsätter vi följderna som konstanta följder

$$x_j = X_j = \hat{x}_i, j \geq i+1.$$

(2)
Med denna algoritm bevisar vi
följande sats.

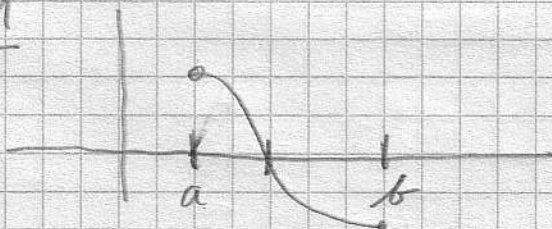
Sats (Bolzanos sats)

Om $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig
med $f(a)f(b) < 0$, så finns

$\bar{x} \in (a, b)$ sådan att $f(\bar{x}) = 0$.
Roten $\bar{x}$ är unik om f är strängt monoton.

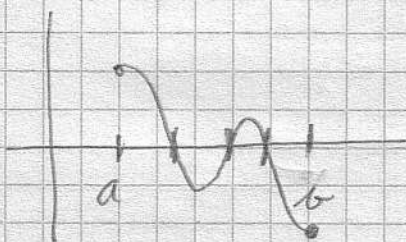
Satsen garanterar alltså att f
har minst en rot $\bar{x}$ i $[a, b]$
om f är kont. på $[a, b]$
och har olika tecken i a och b .

ex 1



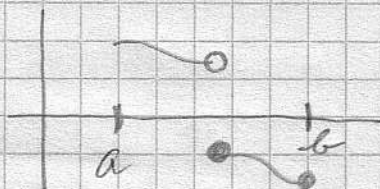
en rot
strängt avtagande

ex 2



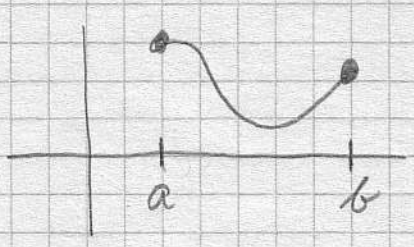
tre rötter
ej monoton på $[a, b]$

ex 3

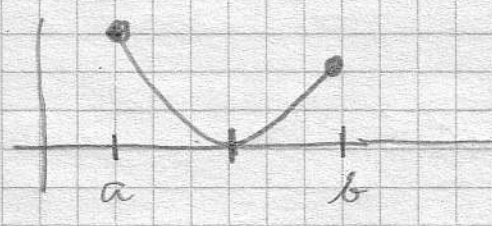


ingen rot
diskontinuerlig

ex 4



ingen rot
 $f(a)$ och $f(b)$ samma tecken



$f(a), f(b)$ samma tecken!

Här finns
 visserligen
 en rot men
 det följer ej
 av Bolzanos
 sats.

Beweis Bisektionsalgoritmen
 ger två följder $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$
 sådana att

- (1) $|x_i - X_i| \leq (b-a) 2^{-i}$ (likhet endast om algoritmen stoppar)
- (2) $|x_i - x_j| \leq (b-a) 2^{-i}$ om $j \geq i$
- (3) $|X_i - X_j| \leq (b-a) 2^{-i}$ om $j \geq i$

Olikheterna (2), (3) visar att $\{x_i\}$ och $\{X_i\}$
 bildar decimalutvecklingar: om
 $(b-a) 2^{-i} < 10^{-N-1}$ så har vi fixerat
 N decimaler. Vi betecknar decimal-
 utvecklingarna med

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i, \quad \bar{X} = \lim_{i \rightarrow \infty} X_i.$$

(4)

Alikriteriet (1) visar att decimalutvecklingarna är lika: om $(b-a)2^{-i} < 10^{-N-1}$ så stämmer N decimaler i $\bar{x}$ och $\bar{X}$ överens. Alltså:

$$\bar{x} = \bar{X} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} X_i.$$

Vi visar nu att $f(\bar{x}) = 0$ i meningen $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0$.

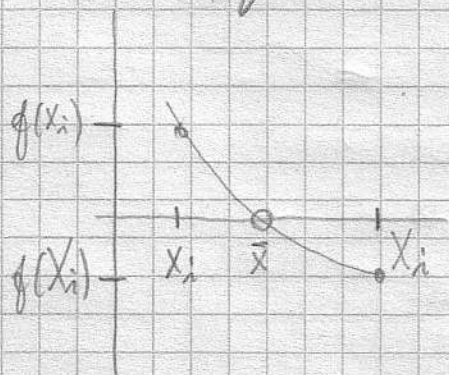
Detta betyder: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ så att

$$(4) \quad i \geq N \Rightarrow |f(x_i) - 0| < \varepsilon.$$

Tag nu $\varepsilon > 0$. Vi ska bestämma $N(\varepsilon)$ så att (4) gäller. Vi antar nu för enkelhets skull att f är Lipschitzkontinuerlig på $[a, b]$ dvs

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Vi får, om $f(x_i) > 0$ och $f(X_i) < 0$,

$$|f(x_i) - 0| = |f(x_i)| = f(x_i) <$$


$$\begin{aligned} &< f(x_i) - f(X_i) = \\ &= |f(x_i) - f(X_i)| \\ &\leq L_f |x_i - X_i| \quad \{\text{enligt (1)}\} \\ &\leq L_f (b-a) 2^{-i} \end{aligned}$$

eftersom $\lim_{i \rightarrow \infty} 2^{-i} = 0$ så

kan vi hitta N så att

$$i \geq N \Rightarrow L_f(b-a)2^{-i} < \varepsilon$$

Alltså gäller (4). Om $f(x_i) < 0$ och $f(x_i) > 0$ kan vi göra på liknande sätt. Om $f(x_i) = f(x_i) = 0$ för $i \geq j$ vi göra något alls, dvs vi tar $N = j$.

Läst visar vi att $\bar{x}$ är unik om f är strängt monoton dvs

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (strängt växande)
eller $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (strängt avtagande)

Antag att vi har två olika
rötter $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$. Då gäller

$$f(\bar{x}_1) < f(\bar{x}_2) \text{ eller } f(\bar{x}_1) > f(\bar{x}_2)$$

Men det är omöjligt då $f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2) = 0$.

Alltså: bara en rot.



Vi kan också visa satsen
om mellanliggande värden.
(Adams 1.4, Theorem 9)

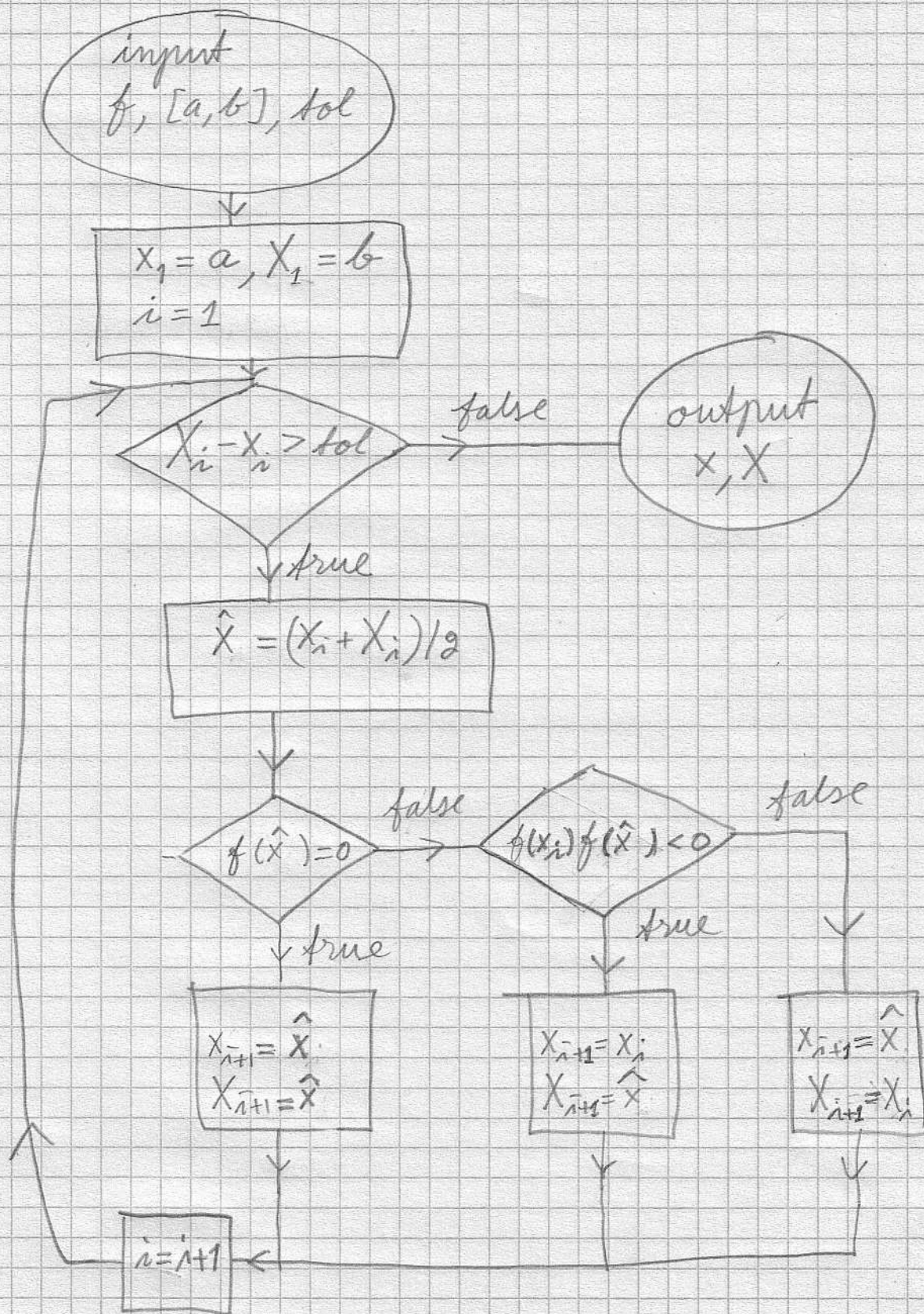
Sats Om f är kontinuerlig på $[a, b]$
och y är ett tal mellan
 $f(a)$ och $f(b)$. Då finns
(minst) en punkt $\bar{x} \in [a, b]$
så att $f(\bar{x}) = y$.

Beweis Låt y vara strikt mellan
 $f(a)$ och $f(b)$, och bilda $F(x) = f(x) - y$.
Då gäller $F(a)F(b) < 0$ eftersom
 $F(a) = f(a) - y$, $F(b) = f(b) - y$ och
 y ligger strikt mellan $f(a)$ och
 $f(b)$. Bolzanos sats ger nu
 $\bar{x} \in (a, b)$ så att $F(\bar{x}) = 0$, dvs
 $f(\bar{x}) = y$. Om $y = f(a)$ eller $y = f(b)$
är saken redan klar. $\square$

Bisectdemo — flowchart

(7)

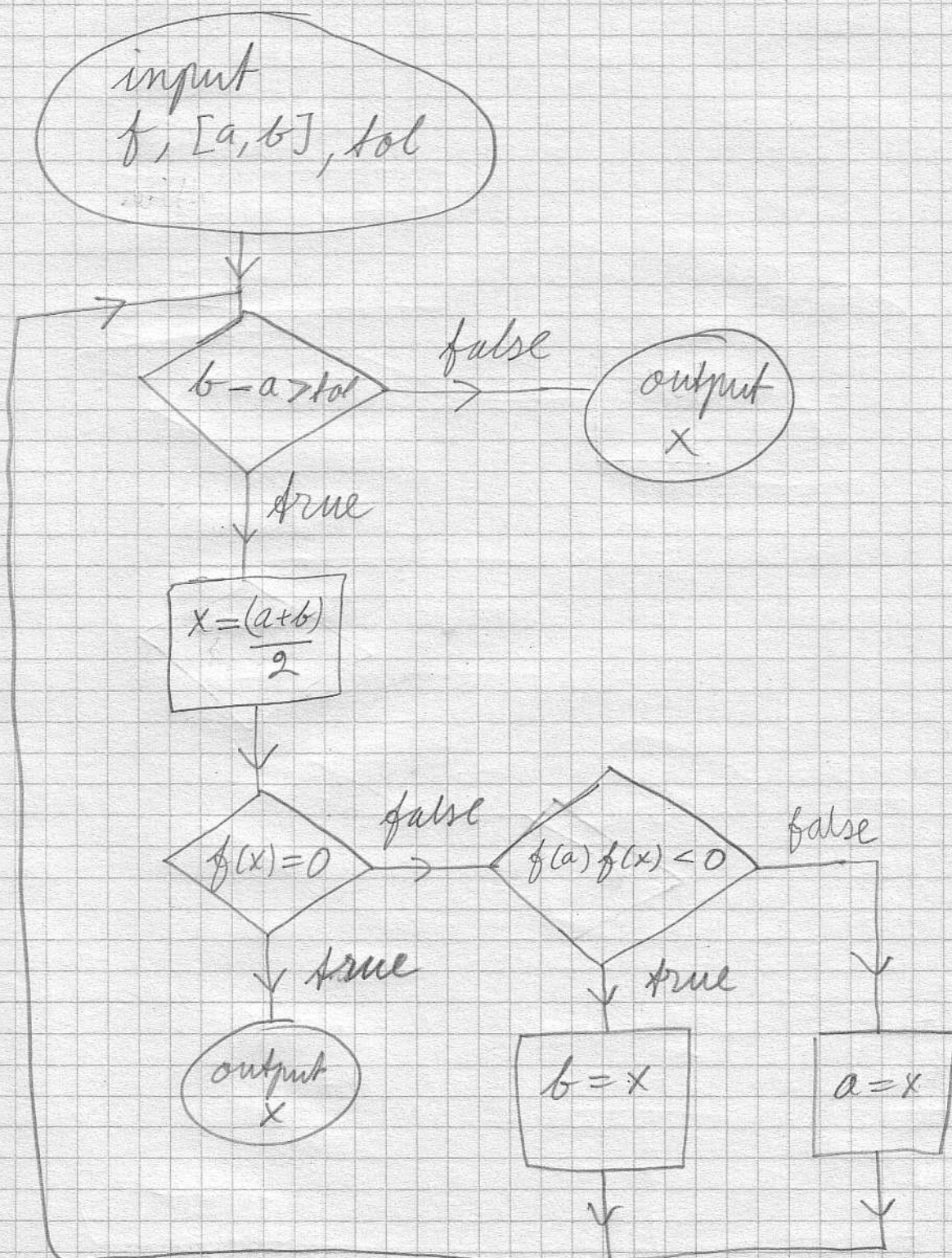
$[x, X] = \text{bisectdemo}(f, [a, b], \text{tol})$



Bisect flowchart

(8)

$x = \text{bisect}(f, [a, b], \text{tol})$



$$\text{Reellt tal} = \text{decimalutveckling} = \text{Cauchy-följd}$$

Låt

$$a = 0. q_1 q_2 q_3 q_4 \dots$$

vara en decimalutveckling (reellt tal). Om vi tittar efter n decimaler

$$a_n = 0. q_1 q_2 \dots q_n$$

så får vi en följd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sådan att

$$|a_i - a_j| < 10^{-i} \quad \text{för } j \geq i$$

$$\begin{array}{r} 0. q_1 q_2 \dots q_i q_{i+1} \dots q_j \\ - 0. q_1 q_2 \dots q_i \\ \hline 0. 00 \dots 0 q_{i+1} \dots q_j \end{array}$$

$$\text{fy } |a_j - a_i| = \underbrace{|0. q_{i+1} \dots q_j|}_{< 1} \cdot 10^{-i} < 10^{-i}$$

Å andra sidan om en
följd uppfyller olikheten

$$|a_i - a_j| < 10^{-N-1} \text{ för } j \geq i$$

så stämmer de N första
decimalerna i a_i överens
med de N första decimalerna
i alla a_j för $j \geq i$. Dvs
en decimalutveckling växer
fram. Till exempel från
bisektion för $x^2 - 2 = 0$:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.00000 \\ x_1 &= 1.00000 \\ x_2 &= 1.25000 \\ x_3 &= 1.37500 \\ x_4 &= 1.37500 \\ x_5 &= 1.40625 \\ x_6 &= 1.40625 \\ x_7 &= 1.4140625 \end{aligned}$$

ändras ej
ändras ej

Vi skriver då

$$a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$$

där a är decimalutvecklingen = reellt tal.

(11)
Sådan följd kallas Cauchy följd:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) :$$

$$i, j \geq N \Rightarrow |a_i - a_j| < \varepsilon$$

Exempel (bisektion)

Vi har $|x_i - x_j| \leq 2^{-i}$ för $j \geq i$.

Tag $\varepsilon > 0$, vi ska bestämma N .

Vi löser ut i ur

$$2^{-i} < \varepsilon$$

$$i \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}_{< 0} < \underbrace{\ln(\varepsilon)}_{< 0}$$

$$i > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Tag $N = \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \right\rceil$ (heltalstaket)

Toleransen ε anger antalet
decimaler: $\varepsilon = 10^{-m-1}$ är m
korrekta decimaler.

Exempel $a_n = 1/n$

Antag $j \geq i$. Då får vi

$$|a_i - a_j| = \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| = \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \leq$$

$$\leq \frac{1}{i}$$

Lös ut i ur $\frac{1}{i} < \varepsilon$

$$i > \frac{1}{\varepsilon}$$

Tag $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$.

Övningar: Visa att följande
är Cauchyföljder.

1. $a_n = 1/n^2$

2. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

3. Visa: a_n och b_n Cauchy $\Rightarrow a_n + b_n$ Cauchy

4. f är Lipschitz på $[a, b]$ och $a_n \in [a, b]$ är Cauchy
 $\Rightarrow f(a_n)$ är Cauchy