Matematik Chalmers

Övningstentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2005

Telefon: xxx
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

---

1. Innehållet i filerna `bisect.m` och `f.m` finns på baksidan av detta blad.

(a) Redogör för vad som utförs efter följande kommandorad i MATLAB: (6 p)

```
>> intervall=[0,2]; tolerans=0.5; y=bisect(intervall, tolerans)
```

Gå igenom programmen steg för steg och redovisa allt, varje villkor, varje siffra som beräknas.

(b) Samma uppgift för kommandoraden (2 p)

```
>> intervall=[0,2]; tolerans=0.5; y=bisect(tolerans, intervall)
```

(c) Samma uppgift för kommandoraden (2 p)

```
>> help bisect
```

2. Formulera och bevisa kontraktionsavbildningssatsen. Du får delpoäng även om du bara klarar en del av beviset.

3. (a) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i en punkt $\bar{x}$. (3 p)

(b) Beräkna med hjälp av deriveringsregler $f'(x)$ för (3 p)

$$f(x) = \sqrt{x}(1 - x^2)^3$$

(c) Bestäm derivatan av $f(x) = x^3$ med hjälp av definitionen av derivata. (4 p)

4. Betrakta funktionen

$$g(x) = \sqrt{x}.$$

(a) Visa (direkt med hjälp av definitionen) att g är Lipschitzkontinuerlig på intervallet $[0.1, 10]$ och bestäm en Lipschitzkonstant för g på detta intervall. (5 p)

(b) Låt $a_n = \dfrac{n^2+5}{n^2+6}$. Bestäm $\lim_{n\to\infty} a_n$. (3 p)

(c) Bestäm $\lim_{n\to\infty} g(a_n)$ där g är som i (a). Motivera ditt svar annars ingen poäng. (2 p)

5. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x_2(x_1^3 + 1) = 3, \\ x_2(x_1 - x_2) = -1. \end{cases}$$

Utför ett steg av Newtons metod på detta system med startvärde $\bar{x} = (1, 2)$. (10 p)

Vänd!

Filen `bisect.m` innehåller:

```
function x = bisect(int, tol)
% bisect - bisection algorithm for the scalar equation f(x) = 0
%   Syntax:
%           x = bisect(int, tol)
%   Arguments:
%           int - 2-element vector specifying an interval int = [a, b]
%           tol - a tolerance
%   Returns:
%           x - an approximate solution in the interval int = [a, b]
%-----------------------------------------------------------------------
a = int(1);
b = int(2);

fa = f(a);
fb = f(b);

while (b - a > tol)
  x = (a+b)/2;
  fx = f(x);

  if (fa * fx < 0)
    b = x; fb = fx;
  else
    a = x; fa = fx;
  end

end

x = (a + b) / 2;
```

Filen `f.m` innehåller:

```
function y=f(x)
y=x^2-2;
```

/stig

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2005. Lösningar.

---

1. (a)
Vi kommer in i programmet bisect.
int=[0,2], tol=0.5
a=0, b=2,
Vi kommer in i programmet f.
x=0, y = -2
Programmet f slutar.
fa=-2, på samma vis beräknas fb=2
while
b-a=2, villkor: $2 > 0.5$ sant
x=1, i programmet f beräknas fx=-1,
if
fa*fx=2, villkor: $2 < 0$ falskt, a=1, fa=-1
end if
end while
while
b-a=1, villkor: $1 > 0.5$ sant
x=1.5, fx=0.25,
if
fa*fx=-0.25, villkor: $-0.25 < 0$ sant, b=1.5, fb=0.25
end if
end while
while
b-a=0.5, villkor: $0.5 > 0.5$ falskt
while loopen slutar
x=1.25
Programmet bisect slutar.
I kommandofönstret: y=1.25
(b) bisect stoppar genast med ett felmeddelande om att int(2) inte är definierad.
(c) I kommandofönstret ser vi

```
bisect - bisection algorithm for the scalar equation f(x) = 0
  Syntax:
          x = bisect(int, tol)
  Arguments:
          int - 2-element vector specifying an interval int = [a, b]
          tol - a tolerance
  Returns:
          x - an approximate solution in the interval int = [a, b]
```

2.

3. (a) Se boken kap 23.4. (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x^2)^3 + \sqrt{x}3(1-x^2)^2(-2x)$ (c) Se boken.

4. (a) Hann inte skriva. (b) 1. (c) Eftersom g är lipschitz gäller att $\lim g(a_n) = g(\lim a_n) = g(1) = 1$.

5. Vi definierar funktionen

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2(x_1^3 + 1) - 3 \\ x_2(x_1 - x_2) + 1 \end{bmatrix}$$

så att ekvationssystemet kan skrivas $f(x) = 0$. Jacobimatrisen är

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 x_2 & x_1^3 + 1 \\ x_2 & x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Första steget av Newtons metod blir nu som följer.
Evaluera Jacobianen och residualen:

$$A = Df(1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = -f(1,2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lös det linjäriserade ekvationssystemet (Gauss eliminationsmetod behövs ej för så litet ekvations-system):

$$Ah = b, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} 6h_1 + 2h_2 = -1, \\ 2h_1 - 3h_2 = 1, \end{cases} \quad h = \begin{bmatrix} -\frac{1}{22} \\ -\frac{4}{11} \end{bmatrix}.$$

Uppdatera x:

$$x = \bar{x} + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{22} \\ -\frac{4}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{22} \\ \frac{18}{11} \end{bmatrix}.$$

`/stig`