Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2005–10–19 fm V

Telefon: Christoffer Cromvik 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

---

1. Betrakta funktionen

$$\begin{cases} g : [0, \infty) \to \mathbf{R} \\ g(x) = \dfrac{2}{2+x} \end{cases}$$

(a) Bestäm en Lipschitz-konstant för g.

(b) Visa (med hjälp av en känd sats) att g har en unik fixpunkt. Beräkna fixpunkten för hand.

(c) Skriv en m-fil som beräknar fixpunkten iterativt med hjälp av MATLAB.

(d) Visa att g är inverterbar. Bestäm inversa funktionen g^{-1}. Ange dess definitionsmängd och värdemängd.

2. Låt $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 2, 3)$, $c = (1, -1, 1)$.

(a) Beräkna projektionen av b på a.

(b) Skriv en m-fil som beräknar projektionen av en vektor u på en vektor v. Ange sedan hur man använder denna för att lösa uppgift (a).

(c) Beräkna volymen av den parallellepiped som spänns upp av a, b, c.

3. (a) Visa att om $f : I \to \mathbf{R}$ är Lipschitz-kontinuerlig och $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchy-följd i I, så är $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ också en Cauchy-följd.

(b) Visa (med definitionen av Cauchy-följd) att $\frac{1}{\sqrt{n}}$ är en Cauchy-följd.

(c) Beräkna (med hjälp av räkneregler) gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$.

4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1(1 - x_2^2) = 0, \\ x_2(1 - x_1^2) = 0. \end{cases}$$

Utför ett steg av Newtons metod på detta system med startvärde $x = (2, 2)$.

5. Formulera och bevisa Bolzanos sats. Du får delpoäng även om du bara klarar en del av uppgiften.

/stig

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2005–10–19 fm V. Lösningar.

---

1. (a)

$$|g(x)-g(y)| = \Big|\frac{2}{2+x}-\frac{2}{2+y}\Big| = \Big|2\frac{(2+y)-(2+x)}{(2+x)(2+y)}\Big| = \Big|\frac{2(y-x)}{(2+x)(2+y)}\Big|$$
$$= \frac{2}{(2+x)(2+y)}|y-x| \le \frac{2}{2\cdot 2}|x-y| = \frac{1}{2}|x-y|, \quad \text{för } x,y\in[0,\infty).$$

Vi får $L_g = 1/2$.
(b) Vi använder kontraktionsavbildningssatsen. Vi kontrollerar dess förutsättningar: (1) $g: I\to I$ med $i=[0,\infty)$. Detta är klart ty värdemängden $R_f=(0,1]\subset I$. (2) g är kontraktion ty $L_g = 1/2 < 1$. Då finns unik fixpunkt $\bar{x}\in I$ enligt satsen.
Fixpunkten fås genom att lösa ekvationen $x=g(x)$ dvs $x=\frac{2}{2+x}$ eller $x^2+2x-2=0$. Vi får $x=-1\pm\sqrt{3}$. Endast den positiva roten ligger i I. Alltså $\bar{x}=-1+\sqrt{3}$.
(c) Vi skriver filen `fikspunkt.m`:

```
function x=fikspunkt(x0,tol)

x=x0;
gx=2/(2+x);

while abs(x-gx)>tol
  gx=2/(2+x);
  x=gx;
end
```

På kommandoraden skriver man sedan:

```
>>  x=fikspunkt(1,1e-4)
```

(d) Funktionen g är inverterbar om den är strängt monoton. Funktionens graf antyder att den är strängt avtagande. Vi kollar detta. Antag att $x,y\in[0,\infty)$ med $x<y$. Då blir

$$g(x)-g(y) = \frac{2}{2+x}-\frac{2}{2+y} = \frac{2}{(2+x)(2+y)}(y-x) > 0$$

dvs $g(x)>g(y)$, strängt avtagande. Enligt satsen om mellanliggande värden har då ekvationen $g(x)=y$ en unik lösning x för alla $y\in R_g$. Detta är inversen: $x=g^{-1}(y)$.
Vi löser ekvationen $g(x)=y$ för hand:

$$\frac{2}{2+x}=y, \quad x=\frac{2-2y}{y}=g^{-1}(y).$$

Alltså: $g^{-1}(x)=\frac{2-2x}{x}$. Definitionsmängd: $D_{g^{-1}}=(0,1]$. Värdemängd: $R_{g^{-1}}=[0,\infty)$.

2. (a)

$$P_a b = \frac{b\cdot a}{|a|^2}a = \frac{6}{3}(1,1,1) = (2,2,2).$$

(b) Vi skriver filen `projektion.m`:

```
function x=projektion(a,b)

x= ( dot(b,a) / dot(a,a) ) * a;
```

På kommandoraden skriver man sedan:

```
>>  x=projektion([1 1 1], [1 2 3])
```

(c) Volymen är absolutbeloppet av trippelprodukten: $|c \cdot a \times b|$.

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -2, 1)$$

$$V = |c \cdot a \times b| = |(1, -1, 1) \cdot (1, -2, 1)| = 4.$$

3. (a) Vi har

$$\begin{aligned} &f : I \to \mathbf{R}, \quad |f(x) - f(y)| \le L_f |x - y|, \ \forall x, y \in I, \\ &|a_m - a_n| \to 0, \quad a_m, a_n \in I. \end{aligned}$$

Då fås

$$|f(a_m) - f(a_n)| \le L_f |a_m - a_n| \to 0$$

vilket betyder att $f(a_n)$ är Cauchy-följd.

(b) Antag att $m \ge n$. Då fås:

$$\begin{aligned} \Big| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \Big| &= \Big| \frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{m}} \Big| = \frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{m}} \frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{m - n}{\sqrt{n}\sqrt{m}(\sqrt{m} + \sqrt{n})} \le \frac{m}{\sqrt{n}\sqrt{m}(\sqrt{m} + \sqrt{n})} \\ &\le \frac{m}{\sqrt{n}\sqrt{m}\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{när } n \to \infty. \end{aligned}$$

(c)

$$\frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1} = \frac{\sqrt{n}}{n} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}} \to 0 \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} = 0$$

4. Vi definierar funktionen

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1(1 - x_2^2) \\ x_2(1 - x_1^2) \end{bmatrix}$$

så att ekvationssystemet kan skrivas $f(x) = 0$. Jacobimatrisen är

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 1 - x_2^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & 1 - x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Första steget av Newtons metod blir nu som följer.

Evaluera Jacobianen och residualen:

$$A = Df(2, 2) = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = -f(2, 2) = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Lös det linjäriserade ekvationssystemet:

$$Ah = b, \quad \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} -3h_1 - 8h_2 = 6, \\ -3h_1 - 3h_2 = 6, \end{cases} \quad h = \begin{bmatrix} -\frac{6}{11} \\ -\frac{6}{11} \end{bmatrix}.$$

Uppdatera x:

$$x = x + h = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{6}{11} \\ -\frac{6}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{11} \\ \frac{16}{11} \end{bmatrix}.$$

5. Se boken.

`/stig`