Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2006–08–28 f V

Telefon: Christoffer Cromvik, Elisabeth Wulcan 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

---

1. Innehållet i filen `fixpoint.m` finns på baksidan av detta blad.

(a) Redogör för hur man använder programmet för att lösa ekvationen

$$x - \cos(x/3) = 0.$$

Redovisa allt, nödvändig m-fil, kommandorad, och så vidare.

(b) Skriv ned en iteration av beräkningen för hand. Redovisa allt som datorn beräknar.

2. (a) Beräkna arean av den triangel som har hörn i punkterna $(1, 1)$, $(2, 0)$ och $(3, 2)$.

(b) Beräkna vinkeln vid hörnet i $(2, 0)$. (Det räcker att ange cosinus för vinkeln.)

3. (a) Bestäm derivatan av $f(x) = x^3$ med hjälp av derivatans definition.

(b) Beräkna med hjälp av deriveringsregler derivatan $f'(x)$ för $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}$.

4. (a) Skriv ned vad som menas med att en funktion f är Lipschitzkontinuerlig på ett intervall I.

(b) Bestäm en Lipschitzkonstant för $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet $[4, 10]$.

5. (a) Formulera fixpunktsatsen för kontraktion.

(b) Visa att satsen kan tillämpas på ekvationen i uppgift 1.

/stig

Vänd!

Filen `fixpoint.m` innehåller

```
function x=fixpoint(g,x0,tol)
% fixpoint - fixed point iteration for the scalar equation x=g(x)
%
%   Syntax:
%           x = fixpoint(g,x0,tol)
%   Arguments:
%           g - string containing the name of a function file
%           x0 - a real number, the initial approximation
%           tol - a tolerance
%   Returns:
%           x - an approximate solution

x=feval(g,x0);
z=x-x0;

while abs(z)>tol
  x1=x;
  x=feval(g,x);
  z=x-x1;
end
```

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2006–08–28 f V. Lösningar.

---

1. (a) Vi skriver en m-fil `funk.m`:

```
function y=funk(x)
y=cos(x/3);
```

Sedan kommandoraden:

```
x=fixpoint('funk', 0, 0.01)
```

(b)

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0, \quad x = \cos(0) = 1, \quad z = 1 \\
&\text{test } |z| = 1 > 0.01 = \text{tol} \quad \text{sant} \\
&x_1 = 1, \quad x = \cos(1/3), \quad z = \cos(1/3) - 1
\end{aligned}$$

2. (a) Vektorn från $(2,0)$ till $(1,1)$ är $a = (1,1) - (2,0) = (-1,1)$. Vektorn från $(2,0)$ till $(3,2)$ är $b = (3,2) - (2,0) = (1,2)$. Vi beräknar kryssprodukten:

$$a \times b = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

Arean är halva absolutbeloppet:

$$A = \frac{1}{2}|a \times b| = \frac{3}{2}$$

(b) Vinkeln fås ur sambandet

$$a \cdot b = |a|\,|b| \cos(\phi)$$

det vill säga

$$\cos(\phi) = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}
x^3 &= \bar{x}^3 + (x^3 - \bar{x}^3) = \bar{x}^3 + (x^2 + x\bar{x} + \bar{x}^2)(x - \bar{x}) \\
&= \bar{x}^3 + 3\bar{x}^2(x - \bar{x}) + (x^2 + x\bar{x} + \bar{x}^2 - 3\bar{x}^2)(x - \bar{x}) \\
&= \bar{x}^3 + 3\bar{x}^2(x - \bar{x}) + (x^2 + x\bar{x} - 2\bar{x}^2)(x - \bar{x}) \\
&= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + E(x, \bar{x})
\end{aligned}$$

Här är

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}) &= \bar{x}^3 \\
f'(\bar{x}) &= 3\bar{x}^2 \\
E(x, \bar{x}) &= (x^2 + x\bar{x} - 2\bar{x}^2)(x - \bar{x}) \\
&= \big((x^2 - \bar{x}^2) + (x\bar{x} - \bar{x}^2)\big)(x - \bar{x}) \\
&= \big((x + \bar{x})(x - \bar{x}) + \bar{x}(x - \bar{x})\big)(x - \bar{x}) \\
&= (x + 2\bar{x})(x - \bar{x})^2
\end{aligned}$$

Om x är nära $\bar{x}$, till exempel, om $|x - \bar{x}| \le |\bar{x}|$ så blir $|x| = |\bar{x} + x - \bar{x}| \le |\bar{x}| + |x - \bar{x}| \le 2|\bar{x}|$ och vi kan uppskatta resttermen så här:

$$|E(x, \bar{x})| = |x + 2\bar{x}|\,|x - \bar{x}|^2 \le \big(|x| + 2|\bar{x}|\big)|x - \bar{x}|^2 \le 3|\bar{x}|\,|x - \bar{x}|^2 = K(\bar{x})|x - \bar{x}|^2$$

(b)

$$f'(x) = D\sqrt{\frac{x}{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}}D\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}}\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{2\sqrt{x(1+x^2)^3}}$$

4. (a) Det ska finnas en konstant L_f sådan att

$$|f(x)-f(y)| \le L_f|x-y| \quad \text{för alla } x, y \in I$$

(b) Eftersom $x, y \ge 4$ har vi

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \frac{|x-y|}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{|x-y|}{4}$$

Alltså $L_f = \frac{1}{4}$.

5. (a) Om $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är en kontraktion, dvs $L_g < 1$, så har g en unik fixpunkt $\bar{x}$, dvs $\bar{x} = g(\bar{x})$, och varje följd som genereras av fixpunktsiterationen $x_i = g(x_{i-1})$ konvergerar mot $\bar{x}$.

(b) Ekvationen i uppgift 1 kan skrivas på formen $x = g(x)$ med $g(x) = \cos(x/3)$. Vi måste visa att $L_g < 1$. Enligt en sats, nämligen Sats 23.1, vet vi att om

$$|f'(x)| \le M \quad \text{för alla } x \in I$$

så är $L_f \le M$. Vi använder detta på funktionen g. Vi får

$$|g'(x)| = |-\tfrac{1}{3}\sin(x/3)| = \tfrac{1}{3}|\sin(x/3)| \le \tfrac{1}{3} \quad \text{för alla } x \in \mathbf{R}$$

Alltså $L_g \le \frac{1}{3} < 1$. Ekvationen har alltså en unik lösning $\bar{x}$ som ges av fixpunktsiterationen.

`/stig`