Matematik Chalmers

Övningstentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2006

Telefon: xxx
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

(Här är nog lite för många deluppgifter men det gör inget när du ska öva dig.)

1. (a) Matlab-test 2006–10–12. (5 p)

(b) Skriv en MATLAB funktionsfil som implementerar funktionen (3 p)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{för } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

(c) Vilket värde har x efter följande: (2 p)

```
a=0.5;
x(1)=2;
for i=2:4
  x(i)=a*x(i-1);
end
x=x';
```

2. (a) Bestäm ekvationerna för den räta linjen som går genom punkten $(1,2,3)$ och är parallell med vektorn $(4,5,6)$.

(b) Beräkna avståndet mellan planet $x+y+z=3$ och punkten $(4,5,6)$.

3. (a) Bestäm linjäriseringen av $f(x)=\sqrt{x}$ i punkten $a=1$ och uppskatta linjäriseringsfelet som funktion av $x-1$ på intervallet $[\frac{1}{4},2]$. (3 p)

(b) Beräkna med hjälp av deriveringsregler $f'(x)$ för (3 p)

$$f(x)=\sqrt{x}(1-x^2)^3$$

(c) Bestäm derivatan av $f(x)=x^3$ med hjälp av definitionen av derivata. (4 p)

4. Betrakta funktionen

$$g(x)=\sqrt{x}.$$

(a) Visa att g är Lipschitzkontinuerlig på intervallet $[0.1,10]$ och bestäm en Lipschitzkonstant för g på detta intervall. (5 p)

(b) Låt $a_n = \dfrac{n^2+5}{n^2+6}$. Bestäm $\lim_{n\to\infty} a_n$. (2 p)

(c) Bestäm N så att

$$n \ge N \Rightarrow \left|\frac{n^2}{n^2+1}-1\right| \le 10^{-6}$$

(3 p)

5. (a) Formulera och kontraktionsavbildningssatsen.

(b) Redogör för den del av beviset som visar att

$$|x_{k+1}-x_k| \le L^k|x_1-x_0|$$

/stig

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2006. Lösningar.

---

1. (b)

```
function y=funk(x)
y=0;
if (-1<x) & (x<1)
  y=1;
end
```

(c)

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} x &= 1 + t4, \\ y &= 2 + t5, \\ z &= 3 + t6 \end{aligned}$$

(b) I planets ekvation ser vi att $P = (1, 1, 1)$ är en punkt i planet och $n = (1, 1, 1)$ är en normalvektor. Låt $P_0 = (4, 5, 6)$ vara den givna punkten. Det sökta avståndet är absolutbeloppet av den skalära projektionen av vektorn $PP_0 = (3, 4, 5)$ på vektorn n:

$$s = \left| \frac{PP_0 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

(Adams sid 550 och 565.)

3. (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = x^{1/2}, & f(1) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2}, & f'(1) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} \end{aligned}$$

Linjäriseringen är

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Felet är

$$E(x) = \frac{1}{2}f''(s)(x - a)^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{4}s^{-3/2}(x - 1)^2 = -\frac{1}{8}\frac{1}{s^{3/2}}(x - 1)^2$$

där s är en (obekant) punkt mellan x och 1. Då x ligger i intervallet $[\frac{1}{4}, 2]$, måste s ligga i samma intervall. Alltså får vi begränsningen

$$|E(x)| = \frac{1}{8}\frac{1}{s^{3/2}}(x - 1)^2 \leq \frac{1}{8}\frac{1}{(\frac{1}{4})^{3/2}}(x - 1)^2 = \frac{1}{8}\frac{1}{(\frac{1}{8})}(x - 1)^2 = (x - 1)^2$$

där vi använt värsta fallet för s.

(b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x^2)^3 + \sqrt{x}3(1-x^2)^2(-2x)$ (c) Se Adams sid 101.

4. (a)

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x}-\sqrt{y}| &= \Big|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\Big| \\
&= \Big|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\Big| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}|x-y| \leq \frac{1}{\sqrt{0.01}+\sqrt{0.01}}|x-y| = \frac{1}{0.2}|x-y| = 5|x-y|
\end{aligned}$$

Man kan även använda medelvärdessatsen:

$$f(x) - f(y) = f'(s)(x-y)$$

där s är en (obekant) punkt mellan x och y. Eftersom

$$|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{0.01}} = \frac{1}{0.2} = 5$$

får vi

$$|f(x) - f(y)| = |f'(s)|\,|x-y| \leq 5|x-y|$$

(b)

$$\frac{n^2+5}{n^2+6} = \frac{1+5/n^2}{1+6/n^2} \to 1$$

(c)

$$\Big|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\Big| = \Big|\frac{n^2-(n^2+1)}{n^2+1}\Big| = \Big|\frac{-1}{n^2+1}\Big| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq 10^{-6}$$

Vi löser ut n:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2} \leq 10^{-6} \\
&n^2 \geq 10^6 \\
&n \geq 10^3
\end{aligned}$$

Tag $N = 10^3$.

5. (a) Antag att I är ett slutet intervall och att $g: I \to I$ är en kontraktion. Då har g en unik fixpunkt $\bar{x} \in I$. Fixpunkten fås som gränsvärde $\bar{x} = \lim_{i\to\infty}$ till fixpunktsiterationen, $x_i = g(x_{i-1})$, för varje startpunkt $x_0 \in I$.

(b)

$$|x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}|.$$

$$|x_k - x_{k-1}| \leq L|x_{k-1} - x_{k-2}|.$$

Genom upprepning:

$$\begin{aligned}
|x_{k+1} - x_k| &\leq L|x_k - x_{k-1}| \\
&\leq L^2|x_{k-1} - x_{k-2}| \\
&\leq L^3|x_{k-2} - x_{k-3}| \\
&\leq \cdots \leq L^k|x_1 - x_0|,
\end{aligned}$$

vilket leder till

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k|x_1 - x_0|.$$

`/stig`