Matematik Chalmers

**Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2006–10–25 f V**

Telefon: Aron Lagerberg, 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och utanför sal MV:F22 senast 13 nov.

---

**1.** (a) MATLAB-test 2006–10–12. (5 p)

(b) Skriv en MATLAB `for`-loop som genererar talen $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \dots,\ 2^{10}$ i en kolumnvektor. (3 p)

(c) Filen `funk.m` är:

```
function y=funk(x)
y=0;
if ( -10<x ) & ( x<10 )
  y=2*x;
end
```

Vilka värden har `x` och `y` efter följande kommandorad: (2 p)

```
>> clear all; x=funk(-6); x=funk(x);
```

**2.** Beräkna avståndet mellan linjen

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3t, \\ y &= 2, \\ z &= 3 + 4t, \end{aligned}$$

och punkten $P_0 = (2, 5, 6)$. Beräkningen görs enligt deluppgifterna (a) och (b):

(a) Tag ut en punkt $P$ på linjen och beräkna först vektorprojektionen av vektorn $PP_0$ på linjens riktningsvektor. (4 p)

(b) Beräkna sedan avståndet. (4 p)

(c) Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(1, 2, 3)$ och är ortogonalt mot vektorn $(4, 5, 6)$. (2 p)

**3.** (a) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = x^3 - 9$ i punkten 2 och uppskatta linjäriseringsfelet som funktion av $x - 2$ på intervallet $[1, 3]$. (5 p)

(b) Skriv ned en iteration av Newtons metod för ekvationen $x^3 = 9$ med startpunkt $x_0 = 2$. (5 p)

**4.** (a) Redogör för definitionen av gränsvärde $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. (3 p)

(b) Beräkna (med räkneregler) gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$. (3 p)

(c) Bestäm $\delta$ så att (4 p)

$$|x - 9| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} - 6 \right| \le 10^{-6}.$$

**5.** (a) Vad menas med att en funktion är en kontraktion på ett intervall? (2 p)

(b) Formulera fixpunktssatsen för kontraktioner (contraction mapping theorem). (4 p)

(c) Redogör för den del av beviset som visar att (4 p)

$$|x_{k+1} - x_k| \le L^k |x_1 - x_0|.$$

/stig

**TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2006–10–25 f V. Lösningar.**

---

**1.** (b)

```
for i=1:11
  x(i)=2^(i-1);
end
x=x';
```

(c) Först blir `x=-12`, sedan `x=0`. Variabeln `y` används bara lokalt i funktionsfilen och får aldrig något värde i huvudprogrammet, den är alltså odefinierad. Svar: `x=0`, `y` odefinierad.

**2.** (a) I linjens ekvation ser vi att $P = (1, 2, 3)$ är en punkt på linjen och $\mathbf{v} = (3, 0, 4)$ är en riktningsvektor. Låt $P_0 = (2, 5, 6)$ vara den givna punkten. Vi beräknar vektorprojektionen av vektorn $\mathbf{a} = PP_0 = (1, 3, 3)$ på vektorn $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v} = \frac{(1,3,3)\cdot(3,0,4)}{25}\,(3,0,4) = \frac{15}{25}(3,0,4) = \frac{3}{5}(3,0,4) = (\tfrac{9}{5}, 0, \tfrac{12}{5}).$$

(b) Det sökta avståndet är längden av vektorn $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}|\mathbf{c}| &= |(1,3,3) - (\tfrac{9}{5}, 0, \tfrac{12}{5})| = |(\tfrac{-4}{5}, 3, \tfrac{-3}{5})| = \tfrac{1}{5}|(-4, 15, -3)| \\ &= \tfrac{1}{5}\sqrt{16 + 225 + 9} = \tfrac{1}{5}\sqrt{250} = \sqrt{\frac{250}{25}} = \sqrt{10}.\end{aligned}$$

(Adams sid 550 och 565.)

(c)

$$\begin{aligned}&(x-1, y-2, z-3)\cdot(4,5,6) = 0\\ &4x + 5y + 6z - 4 - 10 - 18 = 0\\ &4x + 5y + 6z = 32\end{aligned}$$

**3.** (a)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 9, & f(2) &= -1,\\ f'(x) &= 3x^2, & f'(2) &= 12,\\ f''(x) &= 6x.\end{aligned}$$

Linjäriseringen är

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = -1 + 12(x-2).$$

Felet är

$$E(x) = \frac{1}{2}f''(s)(x-a)^2 = \frac{1}{2}6s(x-2)^2 = 3s(x-2)^2,$$

där $s$ är en (obekant) punkt mellan $x$ och 2. Då $x$ ligger i intervallet $[1,3]$, måste $s$ ligga i samma intervall. Alltså får vi begränsningen

$$|E(x)| = 3|s|(x-2)^2 \le 9(x-2)^2, \quad x \in [1,3],$$

där vi använt att $|s| \le 3$. I själva verket är $f''(x) \ge 0$ på det aktuella intervallet, så att

$$0 \le E(x) \le 9(x-2)^2, \quad x \in [1,3].$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\text{beräkna residualen: } b = -f(2) = 1\\
&\text{beräkna derivatan: } a = f'(2) = 12\\
&\text{beräkna ändringen: } h = b/a = \frac{1}{12}\\
&\text{uppdatera: } x = x + h = 2 + \frac{1}{12} = 2.083333...
\end{aligned}$$

(Roten är det irrationella talet $9^{1/3} = 2.0800838....$)

**4.** (a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ betyder att för varje $\epsilon > 0$ finns $\delta$ så att

$$|x-a| \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| \le \epsilon.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} &= \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}\\
&= \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \sqrt{x}+3 \to 3+3 = 6 \quad \text{när } x \to 9.
\end{aligned}$$

Det betyder $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = 6$.

(c) Liknande räkningar ger

$$\left|\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} - 6\right| = |\sqrt{x}+3-6| = |\sqrt{x}-3|.$$

Vi löser ut $x$ ur $|\sqrt{x}-3| \le 10^{-6}$. Vi får

$$\begin{aligned}
&|\sqrt{x}-3| \le 10^{-6}\\
\iff\quad & -10^{-6} \le \sqrt{x}-3 \le 10^{-6}\\
\iff\quad & 3-10^{-6} \le \sqrt{x} \le 3+10^{-6}\\
\iff\quad & (3-10^{-6})^2 \le x \le (3+10^{-6})^2\\
\iff\quad & 9 - 6\cdot 10^{-6} + 10^{-12} \le x \le 9 + 6\cdot 10^{-6} + 10^{-12}\\
\iff\quad & -6\cdot 10^{-6} + 10^{-12} \le x - 9 \le 6\cdot 10^{-6} + 10^{-12}\\
\iff\quad & -6\cdot 10^{-6} + 10^{-12} \le x - 9 \le 6\cdot 10^{-6} + 10^{-12}
\end{aligned}$$

Eftersom $10^{-7} \le 6\cdot 10^{-6} + 10^{-12}$ och $-6\cdot 10^{-6} + 10^{-12} \le -10^{-7}$ kan vi ta $\delta = 10^{-7}$. Om $|x-9| \le 10^{-7}$ så gäller alltså

$$-6\cdot 10^{-6} + 10^{-12} \le -10^{-7} \le x-9 \le 10^{-7} \le 6\cdot 10^{-6} + 10^{-12}$$

och därmed

$$|\sqrt{x}-3| \le 10^{-6}.$$

**5.** (a) Funktionen $g$ är en kontraktion på intervallet $I$ om det finns en konstant $L < 1$, sådan att

$$|g(x) - g(y)| \le L|x-y|, \quad \forall x, y \in I.$$

(b) Antag att $I$ är ett slutet intervall och att $g : I \to I$ är en kontraktion. Då har $g$ en unik fixpunkt $\bar{x} \in I$. Fixpunkten fås som gränsvärde $\bar{x} = \lim_{i\to\infty}$ till fixpunktsiterationen, $x_i = g(x_{i-1})$, för varje startpunkt $x_0 \in I$.

(c) Lipschitzvillkoret ger

$$|x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| \le L|x_k - x_{k-1}|$$

och på samma vis

$$|x_k - x_{k-1}| \leq L|x_{k-1} - x_{k-2}|$$

och så vidare. Här har vi använt att $g : I \to I$ så att iterationen inte hoppar ut ur $I$, dvs $x_k \in I$ för alla $k$. Genom upprepning får vi alltså

$$\begin{aligned}
|x_{k+1} - x_k| &\leq L|x_k - x_{k-1}| \\
&\leq L^2|x_{k-1} - x_{k-2}| \\
&\leq L^3|x_{k-2} - x_{k-3}| \\
&\leq \cdots \leq L^k|x_1 - x_0|,
\end{aligned}$$

dvs

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k|x_1 - x_0|.$$

`/stig`