Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2007–01–18 e V

Telefon: Stig Larsson, 0733–409006
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut.

---

1. (a) MATLAB-test 2006–10–12. (5 p)

(b) Skriv en MATLAB `while`-loop som genererar talen $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{10}$ i en kolonnvektor. (3 p)

(c) Filen `funk.m` är:

```
function y=funk(x)
y=0;
if ( -10<x ) & ( x<10 )
  y=2*x;
end
```

Skissa vad man ser i figurfönstret efter följande kommandorader: (2 p)

```
>> t=linspace(-15,15);
>> for i=1:length(t), x(i)=funk(t(i)); end
>> plot(t,x)
```

2. (a) Beräkna avståndet mellan planet $x + y + 2z = 4$ och punkten $(10, 10, 10)$. (6 p)

(b) Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkterna $(1, 2, 3)$ och $(4, 5, 6)$. (4 p)

3. (a) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = x^2 - 4x - 1$ i punkten 4. Bestäm även linjäriseringsfelet. (5 p)

(b) Skriv ned en iteration av Newtons metod för ekvationen $x^2 - 4x - 1 = 0$ med startpunkt $x_0 = 4$. (5 p)

4. (a) Redogör för definitionen av Cauchy-följd. (3 p)

(b) Visa att $\{\frac{1}{j^2}\}_{j=1}^{\infty}$ är en Cauchy-följd. (3 p)

(c) Undersök gränsvärdet $\lim\limits_{j\to\infty} a^j$ för alla värden på det reella talet a. (4 p)

5. (a) Formulera medelvärdessatsen. (3 p)

(b) Bevisa att om $f'(x) > 0$ på intervallet $[a, b]$ så är f strängt växande på $[a, b]$. (3 p)

(c) Formulera och bevisa ett påstående om hur man kan beräkna Lipschitzkonstanten med hjälp av derivata. (4 p)

/stig

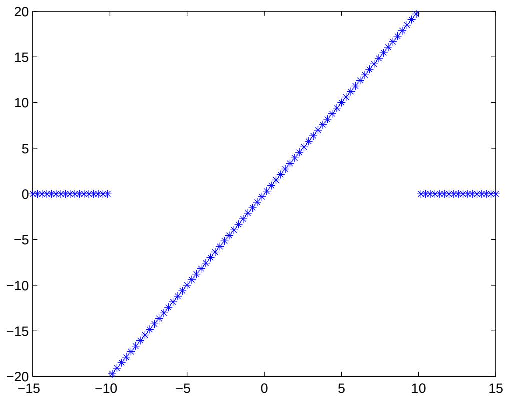
TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2007–01–18 e V. Lösningar.

---

1. (b)

```
i=0;
while i<=10
  x(i+1)=2^(i);
  i=i+1;
end
x=x';
```

(c)



2. (a) I planets ekvation ser vi att $P_0 = (1,1,1)$ är en punkt i planet och $\mathbf{n} = (1,1,2)$ är en normalvektor. Låt $P = (10,10,10)$ vara den givna punkten. Vi beräknar vektorn $\mathbf{v} = \overline{P_0P} = (10,10,10) - (1,1,1) = (9,9,9)$. Det sökta avståndet är absolutbeloppet av den skalära projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{n}$:

$$s = \left|\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| = \left|\frac{(9,9,9)\cdot(1,1,2)}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right| = \left|\frac{36}{\sqrt{6}}\right| = 6\sqrt{6}.$$

(b) En riktningsvektor är $\mathbf{v} = (4,5,6) - (1,2,3) = (3,3,3)$. Linjens ekvation på parameterform:

$$x = 1 + 3t$$
$$y = 2 + 3t$$
$$z = 3 + 3t$$

3. (a)

$$f(x) = x^2 - 4x - 1, \qquad f(4) = -1,$$
$$f'(x) = 2x - 4, \qquad f'(4) = 4,$$
$$f''(x) = 2.$$

Linjäriseringen är

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = -1 + 4(x-4).$$

Felet är

$$E(x) = \frac{1}{2}f''(s)(x-a)^2 = \frac{1}{2}2(x-4)^2 = (x-4)^2.$$

Det betyder att funktionen kan skrivas

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 = -1 + 4(x-4) + (x-4)^2.$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\text{beräkna residualen: } b = -f(4) = 1 \\
&\text{beräkna derivatan: } a = f'(4) = 4 \\
&\text{beräkna ändringen: } h = b/a = \frac{1}{4} \\
&\text{uppdatera: } x = x + h = 4 + \frac{1}{4} = 4.25
\end{aligned}$$

(Roten är det irrationella talet $2 + \sqrt{5} = 4.2361....$)

4. (a) Följden a_j är en Cauchy-följd om det gäller att för varje $\epsilon > 0$ finns ett helt tal N sådant att $|a_j - a_i| \le \epsilon$ om $i, j \ge N$.

(b) Antag att $j \ge i \ge N$. Då har vi

$$\left|\frac{1}{j^2} - \frac{1}{i^2}\right| = \left|\frac{i^2 - j^2}{j^2 i^2}\right| = \frac{j^2 - i^2}{j^2 i^2} \le \frac{j^2}{j^2 i^2} = \frac{1}{i^2} \le \frac{1}{N^2} \le \epsilon$$

Vi måste alltså välja N så stort att $N^2 \ge 1/\epsilon$ dvs $N \ge 1/\sqrt{\epsilon}$.

(c) Fall 1: $-1 < a < 1$. Vi har

$$|a^j| = |a|^j = e^{j\ln(|a|)} \to 0 \quad \text{ty } \ln(|a|) < 0.$$

Fall 2: $a = 1$. $a^j = 1$.

Fall 3: $a > 1$.

$$a^j = e^{j\ln(a)} \to \infty \qquad \text{ty } \ln(a) > 0.$$

Fall 4: $a \le -1$.

$$a^j = (-1)^j |a|^j$$

saknar gränsvärde ty vartannat tal är positivt och vartannat är negativt med absolutbelopp större än 1.

5. (a) – (b) Se boken.

(c) **Sats.** (Beräkning av Lipschitzkonstant) Om

$$|f'(x)| \le M, \quad \forall x \in I,$$

så gäller

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|, \quad \forall x, y \in I,$$

dvs $L_f \le M$.

Bevis. Medelvärdessatsen ger en (okänd) punkt c mellan x och y sådan att

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x-y)| = |f'(c)|\,|x-y| \le M|x-y|, \quad \forall x, y \in I.$$

$\square$

`/stig`