Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2007–08–27 f V

Telefon: Oscar Marmon, 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut.

---

1. (a) MATLAB-test 2006–10–12. (5 p)

(b) Skriv en MATLAB funktionsfil som implementerar funktionen (3 p)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{för } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

(c) Filen `funk.m` är:

```
function y=funk(x)
i=0;
while i<=x
  y(i+1)=2^(i);
  i=i+1;
end
y=y';
```

Vad blir `z` efter följande kommandorader? (2 p)

```
>> y=3;
>> z=funk(y);
```

2. (a) Uttryck vektorn $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ som en summa $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ där $\mathbf{u}$ är parallell med vektorn $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{v}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$. (5 p)

(b) Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkterna $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ och $(4, 5, 6)$. (5 p)

3. (a) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = e^{-x} - x$ i punkten 0. Bestäm även linjäriseringsfelet för $x \geq 0$. (5 p)

(b) Skriv ned ett steg av Newtons metod för ekvationen $e^{-x} = x$ med startpunkt $x_0 = 0$. (5 p)

4. (a) Bestäm ett värde på a så att gränsvärdet

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - (2 + a)x + 2a}{x^2 - x - 6}$$

existerar. Beräkna gränsvärdet. (3 p)

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x + 2\sqrt{x}}{1 - x}$$

(3 p)

(c) Undersök gränsvärdet $\lim_{j \to \infty} a^j$ för alla värden på det reella talet a. (4 p)

5. (a) Formulera Bolzanos sats (om lösning av ekvationen $f(x) = 0$). (3 p)

(b) Skriv ned bisektionsalgoritmen. (3 p)

(c) Bevisa Bolzanos sats. (För full poäng krävs alla detaljer, men det ger också poäng att bara räkna upp bevisets fyra steg.) (4 p)

`/stig`

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del A, 2007–08–27 f V. Lösningar.

---

1. (b)

```
function y=funk(x)
y=0;
if  x^2 <= 1
  y=1-x^2;
end
```

(c) $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

2. (a) Vektorn **u** måste vara vektorprojektionen av **a** i riktningen **b** (Adams, 10.1, Def. 4):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{a}_{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{b}})\, \hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\, \mathbf{b} \\ &= \frac{(2,1,1) \cdot (1,1,0)}{2}\,(1,1,0) = \frac{3}{2}(1,1,0) = (\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{a} - \mathbf{u} = (2,1,1) - (\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1) \end{aligned}$$

(b) Låt $A = (0,0,0)$, $B = (1,2,3)$ och $C = (4,5,6)$. Vektorerna $\mathbf{u} = \vec{AB} = (1,2,3)$ och $\mathbf{v} = \vec{AC} = (4,5,6)$ är parallella med planet och då får vi en normalvektor enligt

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-3, 6, -3)$$

Planets ekvation kan då skrivas

$$\begin{aligned} & n_x(x - A_x) + n_y(y - A_y) + n_z(z - A_z) = 0 \\ & -3(x-0) + 6(y-0) - 3(z-0) = 0 \\ & x - 2y + z = 0 \end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} - x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= -e^{-x} - 1, & f'(0) &= -2, \\ f''(x) &= e^{-x} \end{aligned}$$

Linjäriseringen är

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 - 2x$$

Felet är

$$E(x) = \frac{1}{2} f''(s)(x-a)^2 = \frac{1}{2} e^{-s} x^2$$

där $0 \leq s \leq x$, så att

$$0 \leq E(x) = \frac{1}{2} e^{-s} x^2 \leq \frac{1}{2} x^2$$

eftersom $0 \leq e^{-s} \leq 1$.

(b)

$$\begin{aligned}
&\text{beräkna residualen: } b = -f(0) = -1\\
&\text{beräkna derivatan: } a = f'(0) = -2\\
&\text{beräkna ändringen: } h = b/a = \frac{1}{2}\\
&\text{uppdatera: } x = x + h = 0 + \frac{1}{2} = 0.5
\end{aligned}$$

(Roten är det irrationella talet 0.5671....)

4. (a)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - (2+a)x + 2a}{x^2 - x - 6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-a)(x-2)}{(x-3)(x+2)} \quad (\text{tag } a = 3) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{5}$$

Svar: $a = 3$, gränsvärdet är $\frac{1}{5}$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 2\sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(3 + 2\sqrt{x}/x)}{x(1/x - 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + 2/\sqrt{x}}{1/x - 1} = \frac{3+0}{0-1} = -3$$

(c) Fall 1: $-1 < a < 1$. Vi har

$$|a^j| = |a|^j = e^{j\ln(|a|)} \to 0 \quad \text{ty } \ln(|a|) < 0.$$

Fall 2: $a = 1$. $a^j = 1$.

Fall 3: $a > 1$.

$$a^j = e^{j\ln(a)} \to \infty \qquad \text{ty } \ln(a) > 0.$$

Fall 4: $a \le -1$.

$$a^j = (-1)^j |a|^j$$

saknar gränsvärde ty vartannat tal är positivt och vartannat är negativt med absolutbelopp större än 1.

5. Se föreläsningsanteckningar.

□

/stig