

Hemuppgift 4

Sannolikhetssteori 1, ht 2005.

Sista inlämningsdag: 15 november, 2005

Uppgift 1. Anta att livslängderna av tre batterier, A , B och C , är oberoende och exponentialfördelade med resp. parametrar λ_1 , λ_2 och λ_3 . En ficklampa behöver två batterier för att fungera.

- Anta att man först stoppar i batterierna A och B . Vad är fördelningen för tiden X tills lampan slutar lysa?
- Därefter byts det icke-fungerande batteriet ut mot batteriet C . Vad är fördelningen för tiden Y , som lampan lyser efter bytet?
- Vad är fördelningen för den totala lystiden $X + Y$ om $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$?

Uppgift 2. En tärning kastas gång på gång tills man fått både etta och sexa. Låt N_i vara det kastet då man får i för första gången.

- Vad är fördelningen av N_i ?
- Bestäm frekvensfunktionen för (N_1, N_6) .
- Är N_1 och N_6 oberoende?

Uppgift 3. Anta att s.v. X och Y har en bivariat normalfördelning, dvs att den simultana täthetsfunktionen av X och Y är

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\right)$$

då $-\infty < x, y < \infty$. μ_X , μ_Y , σ_X^2 , σ_Y^2 och ρ är parametrar. Bevisa att den betingade fördelningen av Y givet $X = x$ är normalfördelning med väntevärde $\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$ och varians $\sigma_Y^2(1 - \rho^2)$.

Ledtråd: Bevisa först att $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$.