

Hemuppgift 5

Sannolikhetssteori 1, ht 2005

Sista inlämningsdag: 29 november, 2005

Uppgift 1. Den *betingade kovariansen* av X och Y givet Z definieras av

$$\text{Cov}(X, Y|Z) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X|Z])(Y - \mathbf{E}[Y|Z])|Z].$$

a) Bevisa att

$$\text{Cov}(X, Y|Z) = \mathbf{E}[XY|Z] - \mathbf{E}[X|Z]\mathbf{E}[Y|Z].$$

b) Bevisa formeln för betingade kovariansen, dvs.

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[\text{Cov}(X, Y|Z)] + \text{Cov}(\mathbf{E}[X|Z], \mathbf{E}[Y|Z]).$$

c) Låt $X = Y$ i b) och bevisa att du får formeln för betingade variansen (Proposition 4.2).

d) Anta att stokastiska variabler X och Y är (betingat) oberoende givet $Z = z$ och att $\mathbf{E}[X|Z = z] = \mathbf{E}[Y|Z = z] = z$. Bevisa att

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Var}(Z).$$

Uppgift 2. En 1 meter lång bräda delas i två bitar slumpmässigt (likformig fördelning). Den delen som hamnar till vänster om delningspunkten väljs ut och dess längd betecknas av X . Denna biten delas ytterligare en gång slumpmässigt och den vänstra delen väljs ut. Dess längd betecknas av Y .

a) Vad är den betingade täthetsfunktionen för Y givet att $X = x$?

b) Vad är $\mathbf{E}[Y|X = x]$ och $\text{Var}(Y|X = x)$?

c) Beräkna $\mathbf{E}[Y]$.

Uppgift 3. Låt X och Y vara simultant kontinuerliga s.v. med den simultana täthetsfunktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a) Bestäm den simultana momentgenererande funktionen av X och Y .

b) Bestäm kovariansen och korrelationen mellan X och Y .