

TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, 10p. 2002-01-18.

Lärare och jour: Aila Särkkä, telefon 772 35 42

Hjälpmedel: Valfri räknare med tömda minnen och formelblad.

- 1) Låt $E_1, \dots, E_n$ vara händelser. Bevisa DeMorgans lagar:

$$(\cup_{i=1}^n E_i)^c = \cap_{i=1}^n E_i^c \quad \text{och} \quad (\cap_{i=1}^n E_i)^c = \cup_{i=1}^n E_i^c.$$

(3p)

- 2) Anta att X är en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärde μ och varians σ^2 . Bevisa att $\alpha X + \beta$ är normalfördelad med väntevärde $\alpha\mu + \beta$ och varians $\alpha^2\sigma^2$. (3p)

- 3) a) Definiera oberoendet av två stokastiska variabler X och Y . (1.5p)
b) Bevisa att oberoendet av två diskreta stokastiska variabler X och Y är ekvivalent med det följande:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \quad \text{för alla } x \text{ och } y.$$

(1.5p)

- 4) En kvinna har n nycklar, en av vilka öppnar hennes dörr. Vad är sannolikheten att hon öppnar sin dörr på sitt k :te försök

- a) om hon kommer ihåg vilka nycklar hon redan har provat (dvs. att hon inte väljer samma nyckel mer än en gång)? (1.5p)
b) om hon inte kommer ihåg vilka nycklar hon redan har provat (dvs. att hon varje gång väljer en av nycklarna på måfå)? (1.5p)

- 5) Man har fem bollar och kastar en symmetrisk mynt för att bestämma färgen av var och en av bollarna. Om man får en krona, målas bollen vit och om man får en klave, målas bollen röd. De målade bollarna stoppas in i en låda. Sedan drar man en boll 5 gånger ut ur lådan med återläggning. Bollen är vit varje gång. Vad är då (givet att bollen är vit varje gång) sannolikheten att alla fem bollar är vita? (3p)

- 6) Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende stokastiska variabler med gemensam väntevärde μ och varians σ^2 . Låt $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$. Beräkna $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+j})$ för $j \geq 0$. (3p)

Vänd!

- 7) Man tror att en supernova exploderar genomsnittligt en gång/300 år. Anta att explosionerna bildar en Poissonprocess. Beräkna sannolikheten att
- a) det exploderar minst två supernovor under en viss 60 års tidsperiod. (1.5p)
 - b) det exploderar inga supernovor under en viss 450 års tidsperiod. (1.5p)
- 8) Det finns tre kameror i en affär. Funktionstiderna av kameror är oberoende och exponentialfördelade stokastiska variabler med parameter λ .
- a) Vad är sannolikheten att alla tre kameror fungerar efter tiden t ? (1.5p)
 - b) Låt N vara antalet kameror som fungerar vid tid t . Vad är fördelningen av N ? (1.5p)
- 9) Man ritat en triangel på planet. Ett av hörnen av triangeln ligger i origo, en i punkt X i x -axeln och en i punkt Y i y -axeln. X och Y är oberoende och $N(0, 1)$ -fördelade. Beräkna väntevärdet av ytan av triangeln. (3p)
- 10) Anta att summan av en kunds köp avrundas till närmaste 5 öre. Då är förlusten, som en kund orsakar till försäljaren, en stokastisk variabel, som kan anta värdena -2, -1, 0, 1, 2 öre, vart och ett med sannolikhet $\frac{1}{5}$. Låt X vara den totala förlusten av 10000 kunder. Approximera sannolikheten att den totala förlusten X är större än två kronor. (3p)

Lycka till!