TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 2. 2006-01-12.

Kortfattade lösningar:

1) Se boken (Kapitel 6.2, s. 248(267-268))

2) Låt $Z = |X - Y|$. Då är $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(|X - Y| \leq z) = ... = 1 - 2P(X > Y + Z)$, där $P(X > Y + Z) = \int\limits_{0}^{L-z} \int\limits_{y+z}^{L} \frac{1}{L^2}\, dx\, dy = ... = \frac{1}{2L^2}(L - z)^2$. Då är $F_Z(z) = \frac{2z}{L} - \frac{z^2}{L^2}$, $z \in (0, L)$ och $f_Z(z) = \frac{2}{L} - \frac{2z}{L^2}$, $z \in (0, L)$

3) Låt de svarta korten vara K_1, K_2,...,K_m och låt

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{om kort } K_i \text{ dras innan alla vita} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Då är X =antalet kort som dras= $\sum\limits_{i=1}^{m} X_i + 1$ och $\mathbf{E}[X] = \sum\limits_{i=1}^{m} P(X_i = 1) + 1$. Nu är $P(X_i = 1) = 1/(n + 1)$ och då är $\mathbf{E}[X] = m/(n + 1) + 1$.

4) $X \sim Bin(2, \frac{1}{6})$ och $Y \sim Bin(2, \frac{1}{6})$. Då är $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Kovariansen mellan X och Y är $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = \sum\limits_{x=0}^{2} \sum\limits_{y=0}^{2} xyP(X = x, Y = y) - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = P(X = 1, Y = 1) - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = \frac{2}{36} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{18}$.

5) Låt X_i vara livslängden av kompressor i och låt μ vara den sanna genomsnittliga livslängden. Då är $P(\mu - 5 < \bar{X} < \mu + 5) = P(-5 \cdot \frac{\sqrt{250}}{40} < \frac{\sum_{i=1}^{250} - 250\mu}{40 \cdot \sqrt{250}} < 5 \cdot \frac{\sqrt{250}}{40}) \approx 2\Phi(1.98) - 1 = 0.952$, där Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.

6) Enheten är fem minuter och då är intensiteten av Poissonprocessen 1, dvs. att antalet kunder/5 minuter, $N(t)$, är Poisson(t)-fördelat.

   a) $P(N(2) > 3) = 1 - P(N(2) \leq 3) = 1 - \frac{19}{3}e^{-2}$

   b) Tiden T_i som går mellan två successiva kunder är exponentielfördelad med parameter 1. Väntevärdet av exponetialfördelningen är 1 (enhet 5 minuter) och då tar det genomsnittligt 5 minuter mellan två kunder att komma in i affären.

   c) Ankomsttiden av den andra kunden, S_2, är gammafördelad med parametrar 2 och 1 (enhet 5 minuter). Då är den tillfrågade sannolikheten $P(S_2 < 3) = \int\limits_{0}^{3} xe^{-x}\, dx = 1 - 4e^{-3}$