ARTINS FÖRMODAN: p-ADISKA TAL, ÄNTLIGA KROPPAR, OCH EKVATIONER UTAN HELTALSLÖSNINGAR

JULIA BRANDES

Ta en polynomekvation av grad d i flera variabler och med heltalskoefficienter. Det är klart att om en sådan ekvation har lösningar inom heltalen, så har den även reella lösningar eftersom heltalen är en delmängd av de reella talen. På samma sätt har ekvationen även lösningar om den betraktas som en kongruens modulo något tal q. Omvänt, om en ekvation inte har lösningar i $\mathbb{R}$, eller inte har lösningar som kongruens modulo något tal q, då har den inga heltalslösningar heller.

Det finns en förmodan av Artin som påstår att om variabelantalet hos ett homogent polynom är minst $d^2 + 1$ så borde det finnas lösningar till motsvarande kongruensproblem modulo alla q, och i synnerhet nollskilda lösningar modulo nästan alla q. Fastän denna förmodan är motbevisad i allmänhet, stämmer den ändå i de allra flesta fallen. Vi ska titta närmare på motivationen bakom förmodan. I synnerhet syftar projektet till att konstruera homogena polynom av valfri grad d i d^2 variabler som inte har några icke-triviala nollställen modulo oändligt många tal q, och således inte heller inom heltalen.

Projektet består av två huvuddelar. Den ena delen är att lära sig grundläggande fakta om p-adiska talsystem: Idén är att slå ihop alla $\mathbb{Z}/p^iZ$ där p är primtal och i går mot oändligheten, så att man samtidigt har koll på hur ekvationen beter sig modulo alla potenser av p samtidigt.

Den andra delen handlar om algebra. Det finns metoder för att systematiskt generera polynom av valfri grad d i d variabler som inte har några icke-triviala nollställen i Z/pZ. För att förstå hur det går till ska vi lära oss lite grundläggande teori om ringar och kroppsutvidgningar.

Gruppstorlek: 3 – 6
Förkunskaper: Elementär talteori (kongruenser etc) och Algebraiska strukturer.
Handledare: Julia Brandes, brjulia@chalmers.se